Variétés algébriques privées de variété canonique

Lucien Godeaux

Variétés algébriques privées de variété canonique [1]

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Dans des recherches antérieures [2], nous avons démontré que si une surface algébrique Φ est privée de courbe canonique mais possède un système bicanonique irréductible de dimension au moins égale à deux, elle est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface F, régulière, possédant une seule courbe canonique, le système bicanonique contenant deux systèmes linéaires de même dimension appartenant à l'involution. Inversément, si l'on part d'une surface F possédant les propriétés précédentes l'image Φ de l'involution est privée de courbe canonique.

Nous nous proposons de montrer que le théorème inverse s'étend aux variétés algébriques ayant un nombre pair de dimensions. Précisément, nous démontrons le théorème suivant:

Si une variété algébrique V *à n dimensions possède une seule variété canonique et contient une involution cyclique d'ordre p privée de points unis, le système bicanonique comprenant p systèmes de même dimension appartenant à l'involution, la variété Ω image de cette involution est:*
si n est impair, une variété contenant une variété canonique,
si n est pair, on a nécessairement $p = 2$ et la variété Ω est privée de variété canonique. Son diviseur de Severi est égal à deux.

1. Soit F une surface algébrique régulière contenant une involution cyclique d'ordre premier *p*, dépourvue de points unis, possédant une seule courbe canonique C isolée. Nous supposerons de plus que dans

[1] Communication faite au IIIe Congrès des Mathématiciens Bulgares, à Varna (6-15 septembre 1972).

[2] *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41).

le système bicanonique, il existe p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution et ayant la même dimension.

Désignons par Φ une surface image de l'involution. La courbe canonique C de F appartient à l'involution et il lui correspond sur Φ une courbe Γ dont nous désignerons le genre par π. La courbe C a le genre $p(\pi - 1) + 1$.

La courbe C contient p séries linéaires composées de groupes de l'involution. L'une a la dimension $\pi - 1$ et est la transformée de la série canonique de Γ, les autres ont la dimension $\pi - 2$ et correspondent à des séries paracanoniques de Γ.

Le système bicanonique $|2C|$ de F contient par hypothèse p systèmes linéaires appartenant à l'involution. Nous les désignerons par $|(2C)_1|, |(2C)_2|, \ldots, |(2C)_p|$. Les courbes de ces systèmes découpent sur la courbe C les séries appartenant à l'involution et pour fixer les idées, nous supposerons que la série de dimension $\pi - 1$ est découpée par les courbes du système $|(2C)_1|$. La courbe C, comptée deux fois, appartient à l'un des systèmes $|(2C)_1|, |(2C)_2|, \ldots, |(2C)_p|$.

Aux systèmes précédents correspondent sur la surface Φ des systèmes linéaires complets que nous désignerons par $|(2\Gamma)_1|, |(2\Gamma)_2|, \ldots, |(2\Gamma)_p|$. L'un de ces systèmes est le système bicanonique de Φ.

Puisque $|(2C)_1|$ découpe sur C la transformée de la série canonique de Γ, le système $|(2\Gamma)_1|$ est l'adjoint à la courbe Γ.

Deux cas peuvent se présenter:

1° Les systèmes $|(2\Gamma)_1|, |(2C)_1|$ ont la dimension $\pi - 1$ et le second de ces systèmes ne contient pas la courbe C (nécessairement comptée deux fois puisque C est l'unique courbe canonique de F).

2° Le système $|(2C)_1|$ contient la courbe C comptée deux fois et par suite le système $|(2\Gamma)_1|$ contient la courbe Γ comptée deux fois et celle-ci est la courbe canonique de la surface Φ.

Plaçons-nous dans le premier cas. La courbe C n'appartenant pas au système $|(2C)_1|$ doit appartenir à un seul des autres systèmes, par exemple au système $|(2C)_2|$. Elle compte alors deux fois et le système $|(2\Gamma)_2|$ contient la courbe Γ comptée deux fois. Ce système et son homologue $|(2C)_2|$ ont la dimension $\pi - 1$, égale à celle de $|(2C)_1|$. Les systèmes $|(2\Gamma)_3|, \ldots, |(2\Gamma)_p|$ ne peuvent contenir Γ (nécessairement deux fois) car alors ils seraient équivalents, ce qui est absurde. On a donc $p = 2$.

Nous voyons donc que dans le premier cas, la surface Φ est dépourvue de courbe canonique et contient deux systèmes. Le système $|(2\Gamma)_1|$ adjoint à Γ et le système $|(2\Gamma)_2|$ qui contient la courbe 2Γ et est le système bicanonique de Φ, bien que Γ ne soit pas la courbe canonique. Du reste, les courbes $(2\Gamma)_2$ découpent sur Γ une série paracanonique.

Dans le second cas, le système $|(2C)_1|$ et le système $|(2C)_2|$ ont l'un la dimension π et le second la dimension $\pi - 2$ distinctes alors que par hypothèse elles devraient être égales. Ce second cas est donc à rejeter.

2. Considérons une variété algébrique V à n dimensions contenant une involution cyclique I de période p, privée de points unis. Nous supposerons que l'hypersurface V ne possède qu'une seule variété canonique isolée, que nous désignerons par W. En outre, nous supposerons que le système bicanonique de V contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I et que ces systèmes ont la même dimension. Nous les désignerons par $|(2W)_1|, |(2W_2)|, \ldots, |(2W)_p|$. Un de ces systèmes contient la variété W et comme celle-ci est unique il contient W comptée deux fois.

Désignons par Ω une variété image de l'involution I. La variété W est transformée en soi par H et nous désignerons par Ω_0 la variété qui lui correspond sur Ω. Nous désignerons par $|(2\Omega_0)_i|$ le système linéaire complet qui correspond sur Ω au système $|(2W)_i|$.

Les systèmes $|(2W)_1|, |(2W)_2|, \ldots, |(2W)_p|$ découpent sur la variété W p systèmes linéaires appartenant à l'involution I et l'un deux est le transformé du système canonique de Ω_0. Nous supposerons que ce système est découpé par les variétés $(2W)_1$.

Deux cas peuvent se présenter suivant la parité de n [1]:

Si n est impair, alors la dimension de la variété W est paire et nous avons démontré que le système canonique de W contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I tous de même dimension r sauf l'un d'eux qui est le transformé du système de Ω_0 et a la dimension $r - 1$.

Supposons que ce soit le système $|(2W)_1|$ qui contienne la variété W (comptée deux fois). Alors le système $|(2\Omega_0)_1|$ contient la variété

(1) *Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1938, pp. 291-297).

Ω_0 et est l'adjoint à cette variété. Celle-ci est donc la variété canonique de Ω et le système $|\,(2\Omega_0)_1\,|$ est le système bicanonique de Ω. Le système $|\,(2W)_1\,|$ a donc la même dimension r que les autres systèmes.

Si c'était l'un des systèmes $|\,2(W)_2\,|, \ldots$ qui contenait W, il aurait la dimension $r + 1$ et on arriverait à une contradiction.

Si n est impair, la variété Ω_0 est la variété canonique de Ω.

3. Supposons n pair. La variété W est de dimension impaire et nous avons démontré que le système canonique de W contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I et ayant tous la même dimension r sauf l'un d'eux qui a la dimension $r + 1$ et qui est le transformé du système canonique de la variété Ω_0.

Commençons par observer que deux des systèmes $|\,(2W)_1\,|, \ldots,$ $|\,(2W)_p\,|$ ne peuvent contenir la variété W (nécessairement deux fois) car autrement les variétés qui correspondent sur Ω aux variétés de ces systèmes seraient équivalentes, ce qui est absurde.

Le système $|\,(2\Omega_0)_1\,|$ découpe sur Ω_0 le système canonique. S'il contenait la variété Ω_0, le système $|\,(2W)_1\,|$ aurait la dimension $r + 2$, distincte de celle r des autres systèmes $|\,(2W)_i\,|$.

Dans ces conditions, le système $|\,(2W)_1\,|$ ne peut contenir W et cette variété appartient à un et un seul des autres systèmes, par exemple à $|\,(2W)_2\,|$. Ce dernier système a alors la dimension $r + 1$ comme $|\,(2W)_1\,|$, maix les $p - 2$ autres systèmes ont la dimension r et par conséquent on a $p = 2$. Le système bicanonique de Ω est donc le système $|\,(2\Omega_0)_2\,|$ qui contient la variété $2\Omega_0$, mais n'est pas l'adjoint à Ω_0 qui n'est donc pas une variété canonique.

Si n est pair, on a nécessairement $p = 2$ et la variété Ω est privée de variété canonique.

Sur Ω, les systèmes $|\,(2\Omega_0)_1\,|$ et $|\,(2\Omega_0)_2\,|$ ont la même dimension $r + 1$. Le système tricanonique est l'adjoint au système bicanonique, qui contient la variété $2\Omega_0$. Le système tricanonique est donc $|\,\Omega_0 + \Omega_0'\,|$.

Le système tétracanonique est d'une part l'adjoint $|\,2\Omega_0'\,|$ au système tricanonique et d'autre part le double $|\,2(2\Omega_0)_2\,|$ du système bicanonique. On a donc

$$|\,2\Omega_0'\,| = |\,2(2\Omega_0)_2\,|,$$

c'est-à-dire

$$2\,|\,(2\Omega_0)_1\,| = 2\,|\,(2\Omega_0)_2\,|.$$

Si n est pair, la variété Ω a le diviseur de Severi égal à deux.