Sur les points de diramation des surfaces multiples,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

(*Première note.*)

Nous avons consacré d'assez nombreuses notes, dans ces vingt-cinq dernières années, à l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique et à la construction des surfaces représentant ces involutions [1]. Une involution cyclique I_p, d'ordre p, étant donnée sur une surface F, on peut construire sur celle-ci un système linéaire appartenant à l'involution, contenu dans un système linéaire plus ample, et dépourvu de points-base, En rapportant projectivement les courbes de ce système $|C|$ aux hyperplans d'un espace linéaire, on obtient, comme transformée de la surface F, une surface normale Φ image de l'involution. Soient A un des points unis, supposés en nombre fini, de l'involution I et A′ le point de diramation qui lui correspond sur la surface Φ. Le point A′ est singulier pour cette surface et l'étude de cette singularité revient à celle des singularités des courbes C passant par le point A. On ne peut espérer arriver à déterminer toutes les singularités de la surface Φ au point A′; l'exemple du cas simple où la surface F est un plan sur lequel l'involution I_p est engendrée par une homographie cyclique non homologique montre pourquoi cet espoir est vain [2]. Nous nous sommes donc efforcé de trouver une méthode permettant d'étudier chaque cas, avec la certitude d'arriver au résultat; nous croyons avoir trouvé cette méthode et nous l'appliquons, dans cette note et dans celles qui lui feront suite, à la recherche des cas où le cône tangent à la surface Φ au point A′ se décompose en trois cônes irréductibles.

---

(1) Voir en particulier notre exposé sur : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935), où l'on trouvera la bibliographie de la question; Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (*Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1938); Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1938, pp. 193-222).

(2) Sur les homographies planes cycliques (*Mémoires de la Soc. roy. des Sc. de Liége*, 1928); Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques (*Ibid.*, 1930); Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique (*Ibid.*, 1931).

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous avons établi que l'on peut prendre, pour modèle projectif de la surface F, une surface normale, appartenant à un espace linéaire S_R, à R dimensions, sur laquelle l'involution I_p est déterminée par une homographie T, de période p, possédant p axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$, dont un seul, σ_1 par exemple, rencontre la surface, en un nombre fini de points qui sont les points unis de l'involution. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les dimensions des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$. Désignons par $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ les systèmes d'hyperplans de S_R passant par $\sigma_2, \sigma_3 \ldots, \sigma_p$; $\sigma_1, \sigma_3 \ldots, \sigma_p$; $\ldots$; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. Ces systèmes ont respectivement les dimensions $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Soient $|C|$ le système des sections hyperplanes de F, $|C_1|$, $|C_2|, \ldots, |C_p|$ les systèmes linéaires partiels découpés par Σ_1, $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$. Le système $|C_1|$ est dépourvu de points-base, tandis que les systèmes $|C_2|, |C_3|, \ldots, |C_p|$ ont pour points-base les points unis de l'involution I_p. Ces p systèmes appartiennent à l'involution I_p (c'est-à-dire sont composés au moyen de cette involution). On peut d'ailleurs, en remplaçant éventuellement $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi, supposer que la dimension r_1 de $|C_1|$ et celle R de $|C|$ sont aussi grandes qu'on le veut.

En rapportant projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r $(r = r_1)$, on obtient, comme transformée de la surface F, une surface Φ image de l'involution I_p. Nous désignerons par $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes $C_1, C_2, \ldots, C_p$ de F. Les sections hyperplanes de Φ sont donc les courbes Γ_1.

Si n est l'ordre de la surface Φ et π le genre de ses sections hyperplanes Γ_1, la surface F est d'ordre pn et les courbes C sont de genre $p(\pi - 1) + 1$.

2. Considérons un point uni A de l'involution I_p et supposons que ce soit un point uni non parfait de cette involution (ce qui implique $p > 2$). Le plan tangent à la surface F au point A ne rencontre l'espace σ_1 qu'au point A et s'appuie en deux points sur deux des espaces $\sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_p$, par exemple en un point A_2 sur σ_2 et en un point A_p sur σ_p. Dans le plan α, T détermine une homographie non homologique ayant pour points unis A, A_2, A_p.

Désignons par C_1' les courbes C_1 passant par le point A. Ces courbes acquièrent en ce point une certaine multiplicité $\rho > 1$, les tangentes étant confondues avec les droites $a_2 = AA_2$ et $a_p = AA_p$. Les courbes C_1' ont en commun, dans le voisinage du point A, un certain nombre de points unis de l'involution I_p, formant des suites de points infiniment voisins successifs de A (dont le premier est soit sur a_2, soit sur a_p) et qui se terminent en des points $R_1, R_2, \ldots, R_k$, unis parfaits pour l'involution I_p. Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ les multiplicités respectives des points $R_1, R_2, \ldots, R_k$ pour les courbes C'_1 $(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k \leq \rho)$.

Soit A′ le point de diramation de la surface Φ qui correspond au point uni A. Aux courbes C'_1 correspondent les sections de Φ par les hyperplans passant par A′, sections que nous désignerons par Γ'_1. Le nombre de branches d'origine A′ d'une courbe Γ'_1 est évidemment égal au nombre de branches d'origine A de la courbe C'_1 correspondante, car à un point d'une courbe C'_1 infiniment voisin de l'un des points $R_1, R_2, \ldots, R_k$ correspond sur la courbe Γ'_1 homologue un point variable infiniment voisin de A′. Le point A′ est donc multiple d'ordre $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k$ pour la surface Φ et le cône tangent à cette surface en ce point se scinde en k cônes, respectivement d'ordres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$. Le domaine du point A′, sur la surface Φ, est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de k courbes rationnelles, correspondant aux domaines des points $R_1, R_2, \ldots, R_k$.

Si l'on rapporte projectivement les courbes C'_1 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r-1}, on obtient une surface Φ', homographique à la projection de Φ, à partir du point A′, sur un hyperplan de S_r ne passant pas par A′. Aux domaines des points $R_1, R_2, \ldots, R_k$ correspondent, sur la surface Φ', des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, représentant le domaine du point A′ sur la surface Φ.

On observera que les droites a_2, a_p sont toutes deux tangentes aux courbes C'_1 en A et que l'on a par conséquent $k \geq 2$.

3. Les hyperplans du système Σ_2 coupent le plan tangent α à F en A suivant la droite a_p ; les courbes C_2 qu'ils découpent sur F ont donc un point simple en A et touchent la droite a_p en ce point. Les courbes Γ_2, qui correspondent sur Φ aux courbes C_2, passent donc simplement par le point A′. Sur la surface Φ', les courbes Γ_2 rencontrent donc, en un point variable, l'une des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, par exemple γ_k. Il en résulte que les courbes C_2 passent par le point R_k et par tous les points infiniment voisins de A de la suite qui se termine à R_k. Le nombre des points d'intersection absorbés en A d'une courbe C'_1 et d'une courbe C_2 est multiple de p.

De même, les courbes C_p passent simplement par A en y touchant la droite a_2. Les courbes Γ_p, sur la surface Φ', rencontrent en un point l'une des courbes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k-1}$, par exemple γ_1. Les courbes

C_p contiennent donc tous les points infiniment voisins de A de la suite qui se termine à R_1 et le nombre des intersections de deux courbes C'_1, C_p absorbé en A est multiple de p.

Le nombre de points d'intersection de deux courbes C'_1 absorbés en A est, d'autre part, égal à $p(\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k)$.

4. Considérons un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A et projetons la surface F de ce point sur cet hyperplan; soit F′ la surface obtenue. La surface F′ est transformée en elle-même par T et cette homographie engendre, sur cette surface, une involution I'_p possédant comme points unis les points A_2, A_p. La surface F′ passe simplement par la droite A_2A_p.

Supposons que les courbes C'_1 aient en A σ_2 tangentes confondues avec a_2 et $\sigma_p = \rho - \sigma_2$ tangentes confondues avec a_p. Aux courbes C'_1 correspondent, sur F′, des courbes que nous désignerons encore par C'_1, ayant la multiplité ρ_{21} en A_2 et la multiplicité ρ_{p1} en A_p. On a $\rho_{21} \leq \sigma_2$, $\rho_{p1} \leq \sigma_p$. Les courbes C'_1 de F′ doivent être rencontrées par la droite A_2A_p en σ_2 points confondus en A_2 et en σ_p points confondus en A_p. Par conséquent, si $\rho_{21} < \sigma_2$, les courbes C'_1 ont en commun un ou plusieurs points infiniment voisins de A_2 sur a droite A_2A_p; elles ont de même, si $\rho_{p1} < \sigma_p$, un ou plusieurs points communs infiniment voisins de A_p sur A_pA_2.

Le plan tangent à la surface F′ en A_2 est uni pour l'homographie T. Si A_2 n'est pas un point uni parfait de l'involution I'_p, ce plan s'appuie en A_2 sur σ_2, en A_p sur σ_p et en un troisième point A'_2 sur un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. Sur une courbe C_p, le point A est l'origine d'une branche linéaire et la projection d'une courbe C_2 sur la surface F′ à partir de A est une courbe passant simplement par A et y touchant la droite $A_2A'_2$. Les courbes C'_1, sur la surface F′, ont par conséquent quelques tangentes confondues avec la droite $A_2A'_2$. Si $\rho_{21} < \sigma_2$, il y aura donc deux suites distinctes de points, infiniment voisins successifs de A, ayant en commun le premier point (situé sur a_2); on aura $k \geq 3$.

Projetons du point A_2 la surface F′ sur un hyperplan de Σ_2 ne passant pas par A_2 et soit F″ la surface obtenue. Cette surface est transformée en elle-même par T et à l'involution I'_p de F′ correspond une involution I''_p de F″, ayant comme points unis A'_2 et A_p. La surface F″ contient d'ailleurs la droite A'_2A_p.

Si les courbes C'_1 de F′ ont en A_2, σ'_2 de leurs tangentes confondues avec $A_2A'_2$ et si les projections de ces courbes sur la surface F″ ont la multiplicité ρ_{22} en A'_2, on a $\rho_{22} \leq \sigma'_2$. Si $\rho_{22} < \sigma'_2$, les courbes C'_1, sur la surface F″, ont en commun un ou plusieurs points infiniment voisins de A'_2 sur la droite $A'_2 A_p$; la droite $A'_2 A_p$ rencontre en effet les courbes C'_1 en σ'_2 points confondus en A'_2.

Aux courbes C_p correspondront, sur F'', des courbes passant simplement par A'_2, la tangente à chacune de ces courbes en A'_2 étant variable si A'_2 est uni parfait pour l'involution I''_p, étant fixe et distincte de $A'_2 A_p$ si ce point est uni non parfait. Dans ce dernier cas, les courbes C'_1 de la surface F'' ont au moins une de leurs tangentes en A'' confondue avec cette droite.

Et ainsi de suite, jusqu'au moment où on parviendra à un point uni parfait.

5. Nous allons appliquer ce qui précède à l'étude des points unis de l'involution I_p tels qu'au point de diramation correspondant, le cône tangent à la surface Φ se scinde en trois parties. Nous modifierons un peu nos notations.

Supposons donc que pour le point uni A de l'involution I_p, nous ayons $k = 3$. Alors les courbes C'_1 ont en A :

1° Une suite de h points $P_1, P_2, \ldots, P_h$, infiniment voisins successifs dont le premier est, pour fixer les idées, sur a_2 et dont le dernier est uni parfait pour I_p;

2° Une suite de j points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_j$ infiniment voisins successifs de A dont le premier est sur a_p. Au point Q_j sont infiniment voisins successifs dans une direction une suite de $k-j$ points $Q_{j+1}, Q_{j+2}, \ldots, Q_k$ dont le dernier est uni parfait pour I_p, et, d'autre part, une suite de l points $R_1, R_2, \ldots, R_l$ dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

Les courbes C_p passent par les points $P_1, P_2, \ldots, P_h$. Les courbes C_2 passent par les points $Q_1, Q_2, \ldots, Q_j$ et soit par les points $Q_{j+1}, Q_{j+2}, \ldots, Q_k$, soit par les points $R_1, R_2, \ldots, R_l$. Nous supposerons qu'elles passent par les points $Q_{j+1}, Q_{j+2}, \ldots, Q_k$.

Nous désignerons par γ_1 la courbe qui, sur la surface Φ', correspond au domaine du point P_h, par γ_{21} celle qui correspond au domaine du point Q_k et par γ_{22} celle qui correspond au domaine du point R_l. Nous désignerons encore par ν_1 l'ordre de la courbe γ_1, par ν_{21} celui de la courbe γ_{21}, par ν_{22} celui de la courbe γ_{22} et nous poserons $\nu_2 = \nu_{21} + \nu_{22}$.

6. Les courbes C'_1 ont la multiplicité ν_1 en P_h et sur une courbe C'_1, le point A est l'origine de ν_1 branches passant par $P_1, P_2, \ldots, P_h$. Chacun des points de cette suite a donc la multiplicité ν_1 pour les courbes C'_1.

Les courbes C_p doivent rencontrer les courbes C'_1 en A en un certain nombre de points multiple de p; on a donc, ρ étant la multiplicité du point A pour les courbes C'_1,

$$\rho + h\nu_1 = \lambda p, \tag{1}$$

λ étant un entier positif.

Les courbes C'_1 ont aux points $Q_1, Q_2, \dots, Q_{j+1}$ la même multiplicité

$$\rho_i = \rho - \nu_1,$$

mais au point Q_j, elles ont une multiplicité ρ_2 inférieure à ρ_1. Les points $Q_{j+1}, Q_{j+2}, \dots, Q_k$ ont la multiplicité ν_{21} pour les courbes C'_1.

Nous désignerons par $\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_l = \nu_{22}$ les multiplicités des points $R_1, R_2, \dots, R_l$ pour les courbes C'_1.

En considérant le nombre des points d'intersection des courbes C'_1 et C_2 absorbées en A, nombre qui doit être multiple de p, on a

$$\rho + (j-1)\rho_1 + \rho_2 + (k-j)\nu_{21} = \mu p, \tag{2}$$

μ étant un entier positif.

Le nombre des points d'intersection de deux courbes C'_1 absorbés en A est égal à $p(\nu_1 + \nu_2)$; on a donc

$$\rho^2 + h\nu_1^2 + (j-1)\rho_1^2 + \rho_2^2 + (k-j)\nu_{21}^2 + \Sigma\rho_1'^2 = p(\nu_1 + \nu_2). \tag{3}$$

Le genre d'une courbe C'_1 est égal à

$$p(\pi - 1) + 1 - \tfrac{1}{2}\rho(\rho - 1) - \tfrac{1}{2}h\nu_1(\nu_1 - 1) - \tfrac{1}{2}(j-1)\rho_1(\rho_1 - 1)$$
$$- \tfrac{1}{2}\rho_2(\rho_2 - 1) - \tfrac{1}{2}(k-j)\nu_{21}(\nu_{21} - 1) - \tfrac{1}{2}\Sigma\rho'_1(\rho'_1 - 1).$$

Le point A' étant multiple d'ordre $\nu_1 + \nu_2$ pour la surface Φ, les courbes Γ'_1 sont de genre $\pi - \nu_1 - \nu_2 + 1$. Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe C'_1 et la courbe Γ'_1 homologue, en observant que celle-ci contient $\nu_1 + \nu_2$ points de diramation; nous obtenons, en tenant compte de la formule (3),

$$\rho + h\nu_1 + (j-1)\rho_1 + \rho_2 + (k-j)\nu_{21} + \Sigma\rho'_1 = 2p - \nu_1 - \nu_2.$$

En tenant compte des relations (1) et (2), on a

$$\Sigma\rho'_1 = p(2 - \lambda - \mu) - (\nu_1 + \nu_2) + \rho.$$

On a d'ailleurs $\rho < p$, puisque le point A est uni non parfait; par suite $\lambda = \mu = 1$, et la relation précédente donne

$$\nu_1 + \nu_2 + \Sigma\rho'_1 = \rho. \tag{4}$$

7. Dans la relation (4), remplaçons ρ par $\rho_1 + \nu_1$ et écrivons-la sous la forme

$$\nu_2 + \rho'_1 + \rho'_2 + \cdots + \rho'_l = \rho_1. \tag{5}$$

Référons-nous à une transformée birationnelle de la surface F sur laquelle le point Q_{j+1} soit un point propre. Soient F_1 cette surface et F'_1 une transformée birationnelle de F_1 sur laquelle au point Q_{j+1} correspond une courbe exceptionnelle q. Sur F'_1, le point Q_j appartient à la courbe q, le point Q_{j+1}, infiniment voisin de Q_j, n'appartient pas à cette courbe. Sur la surface F'_1, au point Q_j, sont infiniment voisins successifs un certain nombre de points homologues des points $R_1, R_2, \ldots, R_m$ $(m \leq l)$ appartenant à la courbe q.

Supposons en premier lieu $m > 1$. On a nécessairement $\rho'_1 = \rho'_2 = \ldots = \rho'_m$, puisqu'il n'y a par hypothèse aucune branche des courbes C'_1 qui se détache des autres en $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Par suite,

$$\rho_1 = \rho_2 + m\rho'_1, \quad \rho_2 = \rho'_1 + \nu_{21}$$

et la relation (5) donne

$$\nu_{22} + \rho'_{m+1} + \rho'_{m+2} + \cdots + \rho'_l = \rho'_1.$$

Si $l > m$, on a

$$\rho'_1 \leq \rho'_{m+1} + \cdots + \rho'_l;$$

nous sommes donc dans cette hypothèse conduit à une absurdité. On doit donc avoir

$$m = l, \quad \rho'_1 = \nu_{22}, \quad \rho_2 = \nu_2, \quad \rho_1 = \nu_2 + l\nu_{22}.$$

Supposons maintenant $m = 1$. On a $\rho_1 = \rho_2 + \rho'_1$ et, en répétant pour le point Q_j le raisonnement qui vient d'être fait pour Q_{j-1},

$$\rho_2 = \nu_{21} + m'\rho'_1, \quad (1 \leq m' \leq l).$$

La formule (5) nous donne encore l'égalité

$$\nu_{22} + \rho'_{m'+1} + \cdots + \rho'_l = \rho'_1$$

et, comme plus haut, on en conclut $m' = l$, $\rho'_1 = \nu_{22}$.

Nous voyons donc que :

1° Les points $R_1, R_2, \ldots, R_l$ sont multiples d'ordre ν_{22} pour les courbes C'_1;

2° On a

$$\rho = \nu_1 + \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_1 = \nu_2 + l\nu_{22};$$

3° L'une ou l'autre des relations

$$\rho_2 = \nu_2 \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \nu_2 + (l-1)\nu_{22}.$$

On observera que le cas particulier $j = 1$ est compris dans ce qui précède; dans ce cas, on ne tiendra pas compte de la valeur de ρ_1, mais on obtiendra, par les mêmes raisonnements, les mêmes valeurs pour ρ et ρ_2.

8. Les courbes C'_1 touchant en A une droite distincte de a_2, a_p, acquièrent en ce point A une multiplicité supérieure à ρ. Ces courbes, que nous désignerons par C''_1, forment un système linéaire $|C''_1|$ de dimension $r-2$; sur la surface Φ', il leur correspond des courbes Γ''_1 découpées par les hyperplans passant par un point A'_1 appartenant nécessairement à la courbe γ_1 et à l'une des courbes γ_{21}, γ_{22}. Il en résulte que les cônes tangents en A' à la surface Φ et correspondant l'un à la courbe γ_1, l'autre à la courbe $\gamma_{21}+\gamma_{22}$, ont une seule génératrice en commun. Par suite, le point A'_1 peut être simple ou double pour la surface Φ'.

Considérons maintenant une branche de courbe d'origine A, passant par les points Q_1, Q_2, ..., Q_j mais non par les points Q_{j+1} ou R_1. Les courbes C'_1 rencontrent cette branche en $\rho+(j-1)\rho_1+\rho_2$ points confondus en A. Appelons $\overline{C'_1}$ les courbes C'_1 rencontrant la branche de courbe considérée en $\rho+(j-1)\,\rho_1+\rho_2+1$ points au moins confondus en A. Les courbes $\overline{C'_1}$ forment un système linéaire de dimension $r-2$ et il leur correspond, sur la surface Φ', les sections $\overline{\Gamma'_1}$ de celle-ci par les hyperplans passant par un point $\overline{A'_1}$ commun aux courbes γ_{21} et γ_{22}. De même que le point A'_1, et pour les mêmes raisons, le point $\overline{A'_1}$ est simple ou double pour la surface Φ'.

Les courbes $\overline{C'_1}$ conservent en Q_{j+1} la multiplicité ρ_1, mais elles ont en Q_j une multiplicité ρ'_2 supérieure à ρ_2. En R_l et en Q_k, ces courbes ont respectivement les multiplicités $\nu_{22}-1$, $\nu_{21}-1$. Pour étudier le comportement en A des courbes $\overline{C'_1}$, nous considérerons les intersections absorbées en ce point d'une courbe $\overline{C'_1}$ et d'une courbe C_2, ou d'une courbe C'_1, ou d'une autre courbe $\overline{C'_1}$, ainsi que la relation fournie par la forme de Zeuthen appliquée à la correspondance entre deux courbes $\overline{C'_1}$, $\overline{\Gamma'_1}$ homologues.

9. Supposons en premier lieu que les courbes $\overline{C'_1}$ passent, dans le domaine du point A, par quatre points unis parfaits de I_p : les points P_h, Q_k, R_l et un point S_λ. Le point S_λ est le dernier d'une suite de points infiniment voisins successifs S_1, S_2, ..., S_λ dont le premier est infiniment voisin d'un point de la suite Q_{j+1}, ..., Q_k ou de la suite R_1, ..., R_l. Nous examinerons successivement ces deux hypothèses.

Supposons en premier lieu que le point S_1 soit infiniment voisin du point Q_i $(i>j)$. Les courbes $\overline{C'_1}$ ont les multiplicités ρ en A;

ν_1 en $P_1, P_2, \dots, P_h$; ρ_1 en $Q_1, Q_2, \dots, Q_{j+1}$, $\rho_2' > \rho_2$ en Q_j, $\nu_{22} \quad 1$ en $R_1, R_2, \dots, R_l$; ρ_3 en $Q_{j+1}, \dots, Q_{i-1}$; ρ_4 en Q_i; $\nu_{21} - 1$ en $Q_{i+1}, \dots, Q_k$; enfin $\rho_1'', \rho_2'', \dots, \rho_\lambda''$ en $S_1, S_2, \dots, S_\lambda$. Nous avons par conséquent les relations

$$\rho + (j-1)\rho_1 + \rho_2' + (i-j-1)\rho_3 + \rho_4 + (k-i)(\nu_{21}-1) = p, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho_2 + h\nu_1^2 + (j-1)\rho_1^2 + \rho_2\rho_2' + (i-j-1)\rho_3\nu_{21} + \rho_4\nu_{21} \\ &\quad + (k-i)\nu_{21}(\nu_{21}-1) + l\nu_{22}(\nu_{22}-1) = p(\nu_1+\nu_2), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho^2 + h\nu_1^2 + (j-1)\rho_1^2 + \rho_2'^2 + (i-j-1)\rho_3^2 + \rho_4^2 \\ &\quad + (k-i)(\nu_{21}-1)^2 + l(\nu_{22}-1)^2 + \Sigma\rho_1''^2 = p(\nu_1+\nu_2+\rho_\lambda''). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

L'application de la formule de Zeuthen, en tenant compte des relations (1), (3) et des résultats obtenus plus haut, donne

$$\rho_1'' + \cdots + \rho_{\lambda-1}'' + 2\rho_\lambda'' = l + 2. \tag{4}$$

En utilisant les formules établies plus haut, les relations (1), (2) et (3) peuvent être remplacées par

$$\rho_2' - \rho_2 + (i-j-1)(\rho_3 - \nu_{21}) + \rho_4 - \nu_{21} = k - i, \tag{5}$$

$$\rho_2(\rho_2' - \rho_2) + (i-j-1)\nu_{21}(\rho_3 - \nu_{21}) + \nu_{21}(\rho_4 - \nu_{21}) = (k-i)\nu_{21} + l\nu_{22}, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\rho_2'(\rho_2' - \rho_2) + (i-j-1)\rho_3(\rho_3 - \nu_{21}) + \rho_4(\rho_4 - \nu_{21}) + \Sigma\rho_1''^2 \\ &\quad = (k-i)(\nu_{21}-1) + l(\nu_{22}-1) + p\rho_\lambda''. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Reportons-nous au n° 7 et envisageons le cas où $\rho_2 = \nu_2$. On a alors

$$\rho_1 = \rho_2' + l(\nu_{22}-1), \quad \rho_2' = \nu_{22} - 1 + \rho_3.$$

On en déduit

$$\rho_2' = \nu_2 + l, \quad \rho_3 = \nu_{21} + l + 1.$$

Si nous envisageons au contraire l'hypothèse $\rho_2 = \nu_{21} + l\nu_{22}$, nous avons

$$\rho_1 = \rho_2' + \nu_{22} - 1, \quad \rho_2' = l(\nu_{22}-1) + \rho_3,$$

d'où

$$\rho_2' = \nu_{21} + l\nu_{22} + 1, \quad \rho_3 = \nu_{21} + l + 1.$$

Observons que dans chaque cas la valeur trouvée pour ρ_2' permet de déduire l'une de l'autre les équations (5) et (6).

Les valeurs de ρ_3 étant les mêmes dans chaque cas, nous pouvons traiter ceux-ci simultanément en ce qui concerne la valeur de ρ_4.

Observons tout d'abord que nous avons $\rho_1'' = \dots, = \rho_\lambda''$ (= 1 ou 2 suivant que $\overline{A_1'}$ est simple ou double conique pour la surface Φ').

Nous avons $\rho_3 = \rho_4 + \mu\rho''$ et, si $\mu > 1$, $\rho_4 = \rho'' + \nu_{21} - 1$. On en déduit

$$(\mu + 1)\rho'' = l - 2$$

et, par comparaison avec (4), $\mu = \lambda$.

Si $\mu = 1$, on a $\rho_4 = \mu'\rho'' + \nu_{21} - 1$ et on arrive de même à la conclusion $\mu' = \lambda$. Par conséquent, on a, dans tous les cas,

$$(\lambda + 1)\rho'' = l + 2.$$

Si $\rho'' = 1$, on a $\lambda = l + 1$; si $\rho'' = 2$, on a $\lambda = \frac{1}{2}l$.

10. Supposons en second lieu que le point S_1 soit infiniment voisin du point R_i. Alors les courbes $\overline{C_1'}$ ont les multiplicités

ρ en A; ρ_1 en $Q_1, Q_2, \cdots, Q_{j-1}$; ρ_2' en Q_j; $\nu_{21} - 1$ en $Q_{j+1}, \cdots, Q_k$; ρ' en $R_1, R_2, \cdots, R_{i-1}$; ρ_1' en R_i; $\nu_{22} - 1$ en $R_{i+1}, \cdots, R_l$; $\rho_1'', \rho_2'', \cdots, \rho_\lambda''$ en $S_1, S_2, \cdots, S_\lambda$.

Nous avons les relations

$$\rho + (j-1)\rho_1 + \rho_2' + (k-j)(\nu_{21} - 1) = p, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\rho^2 + h\nu_1^2 + (j-1)\rho_1^2 + \rho_2\rho_2' + (k-j)\nu_{21}(\nu_{21} - 1)\\ &+ (i-1)\rho'\nu_{22} + \rho_1'\nu_{22} + (l-i)\nu_{22}(\nu_{22} - 1) = p(\nu_1 + \nu_2),\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}&\rho^2 + h\nu_1^2 + (j-1)\rho_1^2 + \rho_2'^2 + (k-j)(\nu_{21} - 1)^2 + (i-1)\rho'^2\\ &+ \rho_1'^2 + (l-i)(\nu_{22} - 1)^2 + \Sigma\rho''^2 = p(\nu_1 + \nu_2 + \rho_\lambda'').\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

La formule de Zeuthen conduit à

$$(i-1)\rho' + \rho_1' - i(\nu_{22} - 1) + \rho_1'' + \cdots + \rho_{\lambda-1}'' + 2\rho_\lambda'' = l + 2. \tag{4}$$

La relation (1), jointe à la relation (2) du n° 6, donne

$$\rho_2' - \rho_2 = k - j.$$

La relation (2), jointe à la relation (3) du n° 6, donne

$$(k-j)(\rho_2 - \nu_{21}) + (i-1)\nu_{22}(\rho' - \nu_{22}) + \nu_{22}(\rho_1' - \nu_{22}) = (l-i)\nu_{22}. \tag{5}$$

De (2) et (3), on déduit

$$\left.\begin{aligned}&(k-j)(\rho_1' - \nu_{21} + 1) + (i-1)\rho'(\rho' - \nu_{22}) + \rho_1'(\rho_1' - \nu_{22})\\ &+ \Sigma\rho''^2 = p\rho_\lambda'' + (l-i)(\nu_{22} - 1).\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Supposons en premier lieu $\rho_2 = \nu_2$. On a

$$\rho_1 = \rho_2' + (i-1)\rho' + \rho_1' + (l-1)(\nu_{22} - 1), \quad \rho_2' = \rho' + \nu_{21} - 1;$$

d'où

$$\rho_2' = \nu_2 + k - j, \quad \rho' = \nu_{22} + k - j + 1, \quad \rho_1' = \nu_{22} - i(k-j) + l - 2i + 1.$$

Pour ces valeurs, la relation (5) est vérifiée identiquement, mais la relation (4) donne

$$k - j + 2 + \rho_1'' + \cdots + \rho_{\lambda-1}'' + 2\rho_\lambda'' = 0,$$

ce qui est absurde.

Supposons en second lieu $\rho_2 = \nu_{21} + l\,\nu_{22}$. On a

$$\rho_1 = \rho_2' + \rho', \quad \rho_2' = \nu_{21} - 1 + (i-1)\,\rho' + \rho_1' + (l-i)\,(\nu_{22} - 1);$$

d'où

$$\rho_2 = \nu_{21} + l\nu_{22} + (k-j), \quad \rho' = \nu_{22} - (k-j).$$

Ceci est impossible, car ρ' doit être au moins égal à ν_{22}.

11. Nous venons de rechercher les cas où le point $\overline{A}_1'$ est simple ($\rho'' = 1$) ou double conique ($\rho'' = 2$) pour la surface Φ'. Avant de poursuivre la recherche des cas où ce point est double biplanaire, nous compléterons l'étude des premiers cas.

Observons tout d'abord que des relations (1), (2) et (3) du n° 6, on déduit

$$pl\nu_{22} + l\nu_{22}^2 = \rho_2\,(\nu_2 + l\nu_{22} - \rho_2) + (k-j)\,\nu_{21}\cdot(l+1)\,\nu_{22}.$$

Si $\rho_2 = \nu_2$, on en déduit

$$pl = [(k-j)\,(l+1) + l]\,\nu_{21}, \tag{1}$$

et si $\rho_2 = \nu_{21} + l\,\nu_{22}$,

$$pl = [(k-j)\,(l+1) + 1]\,\nu_{21}. \tag{2}$$

ν_{21} est inférieur à p; donc, p étant premier, ν_{21} divise l.

Nous aurons quatre cas à examiner :

1° $\quad \rho = \nu_1 + \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_1 = \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_2 = \nu_2, \quad \rho_2' = \nu_2 + l,$

$$\rho_3 = \nu_{21} + l + 1, \quad \rho_4 = \rho'' + \nu_{21} - 1.$$

Les relations (5), (6) et (7) du n° 9 donnent deux relations indépendantes,

$$l + (i - j - 1)\,(l+1) + \rho'' - 1 = k - i,$$
$$(l+1)\,[l + 1 + (i-j-1)\,(l+2) + \rho''] = p\rho'' + 1.$$

En tenant compte de la relation (1), on obtient

$$l(l+1)[l + 1 + (i-j-1)(l+2) + \rho''] = (k-j)(l+1)\rho'' + l(\rho''\nu_{21} + 1).$$

Il en résulte que $\rho''\nu_{21} + 1$ est divisible par $l+1$. Comme l est divisible par ν_{21} et que ρ'' est égal à un ou deux, on a $l = \rho''\nu_{21}$.

Supposons $\rho'' = 1$. On a $l = \nu_{21}$, $\lambda = l + 1$,

$$p = (i-j)(\nu_{21}+1)(\nu_{21}+2) - 1, \quad k = (i-j)(\nu_{21}+2) + j + 1,$$

et les relations

$$(h+1)\nu_1 = (\nu_{21}+1)[(i-i)(\nu_{21}+2)-(\nu_{22}+1)],$$
$$\nu_1 - i(\nu_{21}+2) + j[\nu_{22} - 2(\nu_{21}+1)](\nu_{21}+1) + \nu_{22} + 1 = 0.$$

Supposons $\rho'' = 2$. Nous avons $l = 2\nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21}$ et

$$p = (i-j)(\nu_{21}+1)(2\nu_{21}+1) + \nu_{21}, \quad k = (i-j)(2\nu_{21}+1) + i,$$
$$(h+1)\nu_1 = (2\nu_{21}+1)[(i-j)(\nu_{21}+1) - \nu_{22}],$$
$$\nu_1 - i(\nu_{21}+1) + j(2\nu_{21}+1)(\nu_{22}+1) + \nu_{22} = 0.$$

2° $\rho = \nu_1 + \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_1 = \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_2 = \nu_2, \quad \rho_2' = \nu_2 + l,$
$$\rho_3 = \nu_{21} + l + 1, \quad \rho_4 = \lambda\rho'' + \nu_{21} - 1.$$

Les équations (5), (6), (7) du n° 9 donnent

$$(l+1)(i-j+1) - \rho'' - 1 = k - i,$$
$$(l+1)^2 + (i-j-1)(l+1)(l+2) + (l+1)(l+2-\rho'') = p\rho'' + 1.$$

En tenant compte de la relation (1), on trouve

$$(l+1)[l(l+1) + (i-j-1)l(l+2) + l(l+2-\rho'') - (k-j)\rho''\nu_{21}] = l(\rho''\nu_{21}+1),$$

et par suite $l = \rho''\nu_{21}$.

Si $\rho'' = 1$, on a $l = \nu_{21}$, $\lambda = l+1$ et

$$p = (i-j)(\nu_{21}+1)(\nu_{21}+2) + \nu_{21}(\nu_{21}+1) - 1, \quad k = (i-j)(\nu_{21}+2) + j + 1,$$
$$(h+1)\nu_1 = (i-j)(\nu_{21}+1)(\nu_{21}+2) + (\nu_{21}+1)(\nu_{21} - \nu_{22} - 1),$$
$$\nu_1 - i(\nu_{21}+1) + j(\nu_{21}+1)(\nu_{22}+2) + \nu_{21} + \nu_{22} - (\nu_{21}^2 - 1) = 0.$$

Si $\rho'' = 2$, on a $l = 2\nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21}$ et

$$p = (i-j)(\nu_{21}+1)(2\nu_{21}+1) + 2\nu_{21}^2 - 1,$$
$$k = 2(i-j)(\nu_{21}+1) + 2(\nu_{21}-1) + j,$$
$$(h+1)\nu_1 = (i-j)(\nu_{21}+1)(2\nu_{21}+1) + (2\nu_{21}+1)(\nu_{21}+\nu_{22}-1),$$
$$\nu_1 - i(\nu_{21}+1) + j(2\nu_{21}+1)(\nu_{22}+1) + \nu_{22} - \nu_{21} + 1 = 0.$$

3° $\rho = \nu_1 + \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_1 = \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_2 = \nu_{21} + l\nu_{22},$
$$\rho_2' = \nu_{21} + l\nu_{22} + 1, \quad \rho_3 = \nu_{21} + l + 1, \quad \rho_4 = \rho'' + \nu_{21} - 1.$$

On a

$$(i-j-1)(l+1) + \rho'' = k - i,$$
$$(l+1) + (i-j-1)(l+1)(l+2) + \rho''(l+1) = p\rho'' - 1;$$

d'où, par (2),

$$(l+1)[l + (i-j-1)l(l+2) + l\rho'' - (k-j)\rho''\nu_{21}] = \nu_{21}\rho'' - l.$$

On en déduit $l = \nu_{21}\rho''$, comme plus haut. On a, en outre,

$$l + (i - j - 1)\, l(l+2) + l\rho'' - (k - j)\rho''\nu_{21} = 0,$$

relation d'ailleurs équivalente à la première relation contenant k.

Si $\rho'' = 1$, on a $l = \nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21} + 1$ et

$$p = (i-j)(\nu_{21}+1)(\nu_{21}+2) - \nu_{21}(\nu_{21}+1) + 1,$$
$$k = (i-j)(\nu_{21}+1) - \nu_{21} + i,$$
$$(h+1)\nu_1 = (i-j)(\nu_{21}+1)(\nu_{21}+2) - (\nu_{21}+1)(\nu_{21}+\nu_{22}) - \nu_{21} + 1,$$
$$\nu_1 - i(\nu_{21}^2 + \nu_{21} + 1) + j(\nu_{21}+1)(\nu_{22}+2) + \nu_{21}(\nu_{22}+2) - 1 = 0.$$

Lorsque $\rho'' = 2$, on a $l = 2\nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21}$ et

$$p = (i-j)(\nu_{21}+1)(2\nu_{21}+1) - 2\nu_{21}^2 + 1.$$
$$k = (i-j)(2\nu_{21}+1) - 2\nu_{21} + 1 + i,$$
$$(h+1)\nu_1 = (i-j)(\nu_{21}+1)(2\nu_{21}+1) - (2\nu_{21}+1)(\nu_{21}+\nu_{22}) + 1,$$
$$\nu_1 - i(\nu_{21}+1) + j(2\nu_{21}+1)(\nu_{22}+1) + 2\nu_{21}(\nu_{22}+1) - 1 = 0.$$

4° $\quad \rho = \nu_1 + \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_1 = \nu_2 + l\nu_{22}, \quad \rho_2 = \nu_{21} + l\nu_{22},$

$$\rho_2' = \nu_{21} + l\nu_{22} + 1, \quad \rho_3 = \nu_{21} + l + 1, \quad \rho_4 = \nu_{21} + \lambda\rho'' - 1.$$

On trouve

$$(l+1)(i-j) = k - i + \rho'' - 1,$$
$$(l+1)[1 + (i-j)(l+2) - \rho''] = p\rho'' - 1;$$

d'où, par (2),

$$(l+1)[l + (i-j)\, l(l+2) - l\rho'' - (k-j)\rho''\nu_{21}] = \rho''\nu_{21} - l.$$

On en conclut $l = \rho''\nu_{21}$.

Lorsque $\rho'' = 1$, on a $l = \nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21} + 1$ et

$$p = (i-j)(\nu_{21}+1)(\nu_{21}+2) + 1, \quad k = (i-j)(\nu_{21}+1) + i,$$
$$(h+1)\nu_1 = (i-j)(\nu_{21}+1)(\nu_{21}+2) - \nu_{22}(\nu_{22}+1) - \nu_{21} + 1,$$
$$\nu_1 - i(\nu_{21}+2) + j(\nu_{21}+1)(\nu_{22}+2) + \nu_{21}(\nu_{22}+1) - 1 = 0.$$

Lorsque $\rho'' = 2$, on a $l = 2\nu_{21}$, $\lambda = \nu_{21}$ et

$$p = (i-j)(\nu_{21}+1)(2\nu_{21}+1) - \nu_{21}, \quad k = (i-j)(2\nu_{21}+1) - 1 + i,$$
$$(h+1)\nu_1 = (i-j)(\nu_{21}+1)(2\nu_{21}+1) - \nu_{22}(2\nu_{21}+1) - 2\nu_{21},$$
$$\nu_1 - i(\nu_{21}+1) + j(2\nu_{21}+1)(\nu_{22}+1) + \nu_{21}(1 + 2\nu_{22}) = 0.$$

Liége, le 9 mars 1940.