Bulletin de la Classe des sciences

Remarque sur un théorème de F. Enriques

Lucien Godeaux

Résumé
Extension du domaine d'application d'un théorème de F. Enriques sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Remarque sur un théorème de F. Enriques. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 59, 1973. pp. 787-792;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1973.60770

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1973_num_59_1_60770

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarque sur un théorème de F. Enriques

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Extension du domaine d'application d'un théorème de F. Enriques sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques.

On sait que Castelnuovo a démontré que si entre deux courbes algébriques C', C existe une correspondance (l,n), le transformé sur C d'un groupe canonique de C', joint au groupe des points unis de la correspondance, est un groupe canonique de la courbe C (1). Enriques a donné une extension de ce théorème aux correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques (2). Supposons que nous ayons une correspondance (l,n) entre deux surfaces algébriques F', F. Les groupes de n points de F qui correspondent aux points de F' forment une involution. Il existe en général ∞^1 points de F qui comptent au moins pour deux dans le groupe de l'involution auquel ils appartiennent. Ils forment une courbe D, courbe unie de la correspondance. La transformée sur F d'une courbe canonique de F', jointe à la courbe D, est une courbe canonique de la surface F. Dans sa démonstration, Enriques suppose implicitement que la courbe D, si elle existe, est une courbe effective. Or, il peut se faire qu'en dehors de la courbe D, il existe des points isolés qui, comptés n fois, forment

(1) *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionli di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, 2° sem. 1891). Memorie Scelte, pp. 71-77 (Bologna, Zanichelli, 1937).

(2) *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche* (Memorie della Accademia di Torino, 1893, pp. 171-232). Memorie scelte di Geometria, volume I, pp. 31-106 (Bologna, Zanichelli, 1956).

des groupes de l'involution. Nous démontrons dans cette note que si ces points sont simples pour la surface F, le théorème d'Enriques est encore applicable.

1. Soit une correspondance (l,n) entre deux surfaces algébriques F′, F, I l'involution d'ordre n formée sur F par les points qui correspondent aux points de F′. Supposons que l'involution I possède une courbe unie D et, en dehors de cette courbe, un point uni P, simple pour la surface F, qui compté n fois forme un groupe de l'involution I. Au point P correspond sur F′ un point multiple P′ équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à un ensemble de courbes rationnelles dont le degré virtuel est inférieur à -1.

Supposons que les courbes canoniques K′ de F′ passent k fois par le point P′, c'est-à-dire rencontrent en k points les courbes rationnelles équivalentes au point P′.

Considérons sur F′ un système linéaire $|\,\Gamma\,|$ dont les courbes ne passent pas par P′. Les courbes adjointes Γ' au courbes Γ passent k fois par P′, puisque l'on a

$$|\,\Gamma' - \Gamma\,| = |\,\mathrm{K}'\,|.$$

Désignons par C, C′, K les courbes qui correspondent respectivement sur F aux courbes Γ, Γ', K′. Nous avons

$$\mathrm{C}' \equiv \mathrm{C} + \mathrm{K} + \mathrm{D}$$

et les courbes C′ et K passent k fois par P.

Faisons correspondre à F une surface $\overline{\mathrm{F}}$ birationnellement identique mais de telle sorte qu'au point P corresponde sur $\overline{\mathrm{F}}$ une courbe exceptionnelle ρ, rationnelle, de degré virtuel -1. Le système canonique de $\overline{\mathrm{F}}$ est le système $|\,\overline{\mathrm{C}} + \overline{\mathrm{D}} + k\rho\,|$, en désignant par $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{D}}$ les courbes qui correspondent à C, D sur $\overline{\mathrm{F}}$. Le système canonique $|\,\mathrm{L}\,|$ de F est donné par

$$|\,\mathrm{L}\,| = |\,\mathrm{K} + \mathrm{D} + k\mathrm{P}\,|,$$

en désignant par P la courbe rationnelle infiniment petite équivalente au domaine du point simple P sur la surface F [1].

[1] Cette locution est employée par Enriques dans son ouvrage *Le superficie algebriche* (Bologna, Zanichelli, 1949). Voir p. 33.

2. Nous allons donner un exemple de cette extension du théorème d'Enriques.

Considérons l'homographie cyclique H d'équations

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon x_4,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. La surface F, du sixième ordre, d'équation

$$\varphi_6(x_1,x_2) + \varphi_{33}(x_1,x_2;x_3,x_4) + \psi_6(x_3,x_4) = 0$$

où φ_6 et ψ_6 sont des formes algébriques du sixième ordre de leurs arguments et φ_{33} une forme cubique de x_1, x_2 dont les coefficients sont des formes cubiques de x_3, x_4, est transformée en soi par H. Sur F, H détermine une involution cyclique du troisième ordre présentant douze points unis, six sur la droite $x_1 = x_2 = 0$ et six sur la droite $x_3 = x_4 = 0$.

Ces points sont unis de première espèce. Si P_0 est un point uni situé sur la droite $x_1 = x_2 = 0$ par exemple, le plan tangent à F en P_0 passe par la droite $x_3 = x_4 = 0$ et dans ce plan, H détermine une homologie de centre P_0.

Soit Φ une image de l'involution. Pour obtenir un modèle projectif de Φ, rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace S_7 à sept dimensions, les surfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes de cette homographie. Nous obtenons une surface Φ d'ordre 18 sur laquelle, aux 12 points unis, qui sont simples pour la surface F, correspondent des points triples à cône tangent rationnel ([1]), équivalents à des courbes rationnelles de degré virtuel -3. De plus, aux courbes canoniques de Φ correspondent les sections de F par les quadriques passant par les points unis de l'involution, c'est-à-dire par les quadriques passant par les axes de l'hoùographie H.

La surface F est régulière et par conséquent également la surface Φ. Les courbes canoniques de F sont découpées par les quadriques et les genres de F sont $p_a = p_g = 10$.

Entre le genre arithmétique de F et celui p'_a de Φ, on a la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 12.4,$$

d'où $p'_a = 4$.

([1]) Voir notre ouvrage sur la *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Ediz. Cremonese, 1963).

Si l'on considère le transformé sur F du système canonique de Φ, en ajoutant à ce système les 12 courbes infiniment petites représentant sur F les domaines des points unis, on obtient le système canonique de F.

3. On peut obtenir aisément les équations de la surface Φ.

L'équation des suıfaces cubiques transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes de l'homographie est

$$f_3(x_1,x_2) + f_3'(x_3,x_4) = 0,$$

où f_3, f'_3 sont des formes cubiques de leurs arguments, à coefficients variables.

Posons

$$Y_1 = x_1^3, Y_2 = x_1^2x_2, Y_3 = x_1x_2^2, Y_4 = x_2^3,$$

$$Z_1 = x_3^3, Z_2 = x_3^2x_4, Z_3 = x_3x_4^2, Z_4 = x_4^3$$

et considérons les Y, Z comme coordonnées des points d'un espace S_7 à 7 dimensions.

L'élimination des x nous donne les équations de deux cubiques gauches K_1, K_2, respectivement

$$\left\| \begin{matrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (K_1)$$

$$\left\| \begin{matrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (K_2)$$

Aux groupes de l'involution engendrée par H dans l'espace des x, correspond dans S_7 une variété W à trois dimensions lieu des droites s'appuyant sur les deux cubiques gauches K_1, K_2. Celles-ci sont triples pour la variété W, d'ordre neuf.

A l'équation de la surface F correspond dans S_7 l'équation d'une hyperquadrique Q que nous écrirons sous la forme

$$\varphi(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) = 0.$$

La surface Φ est l'intersection de la variété W et de l'hyperquadrique Q. Celle-ci rencontre les cubiques gauches K_1, K_2 chacune en six points triples qui sont les points de diramation de la correspondance entre Φ et F.

Un plan passant par la droite $x_1 = x_2 = 0$ coupe F suivant une courbe d'ordre six à laquelle correspond sur Φ la sections de cette surface par le cône projetant K_1 d'un point de K_2. De même à la section de F par un plan passant par $x_3 = x_4 = 0$ correspond sur Φ la section de cette surface par le cône projetant K_2 d'un point de K_1. Nous désignerons ces courbes respectivement par γ_1 et γ_2. Elles sont de genre deux.

Dans le système des courbes découpées sur F par les quadriques, il y a trois systèmes composés au moyen de l'involution, ils ont pour équations

$$\lambda_{13}x_1x_3 + \lambda_{14}x_1x_4 + \lambda_{23}x_2x_3 + \lambda_{24}x_2x_4 = 0, \tag{1}$$

$$\mu_1x_1^2 + \mu_2x_1x_2 + \mu_3x_2^2 = 0, \quad \mu_1'x_3^2 + \mu_2'x_3x_4 + \mu_3'x_4^2 = 0$$

Aux deux derniers systèmes correspondent les faisceaux $|\gamma_2|$, $|\gamma_1|$ comptés deux fois.

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ les courbes rationnelles de diramation correspondant sur la surtace Φ aux points unis situés sur la droite $x_1 = x_2 = 0$ et par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_6$ celles qui correspondent aux points unis situés sur la droite $x_3 = x_4 = 0$.

A la section de F par une quadrique quelconque correspond sur Φ une courbe γ qui appartient totalement à un système linéaire $|\gamma|$. Si la quadrique tend d'une manière continue vers une quadrique du second système, la courbe γ se réduit à une courbe γ_2 comptée six fois, augmentée des courbes de diramation qu'elle rencontre comptée deux fois. Le même raisonnement montre que l'on peut écrire

$$6\gamma_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_6 \equiv 6\gamma_1 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_6.$$

Si γ_0 est une courbe correspondant sur Φ à la section d'une quadrique (1) et si la quadrique considérée tend continuement vers une quadrique (1), on voit que la courbe $3\gamma_0 + \Sigma\alpha + \Sigma\beta$ appartient au système $|\gamma|$ et on a donc la relation fonctionnelle

$$|3\gamma_0 + \Sigma\alpha + \Sigma\beta| = |6\gamma_1 + \Sigma\beta| = |6\gamma_2 + \Sigma\alpha|.$$

En élevant au cube l'équation (1), nous obtenons dans S_7 l'équation d'une hyperquadrique Q′ qui découpe sur Φ une courbe $3\gamma_0$, c'est-à-dire une hyperquadrique qui oscule la surface Φ le long d'une courbe γ_0. Notons que l'hyperquadrique Q′ passe par les cubiques gauches

K_1, K_2 et que les points de diramation de Φ sont triples pour la courbe $3\gamma_0$ et par suites simples pour la courbe (canonique) γ_0.

Notons qu'en considérant les courbes qui correspondent sur Φ aux sections planes de F, on obtiendrait l'égalité fonctionnelle

$$| 3\gamma_1 + \Sigma\beta | = | 3\gamma_2 + \Sigma\alpha |.$$

Liège, le 28 août 1973.