Bulletin de la Classe des sciences

# Aperçu des recherches de Géométrie à l'Académie royale de Belgique (1772-1972)

Lucien Godeaux

**Résumé**
Nous indiquons dans cette note quel fut l'apport à la Géométrie dû à l'Académie royale de Belgique, en nous limitant aux travaux les plus importants et dont les auteurs sont aujourd'hui décédés.



doi : https://doi.org/10.3406/barb.1973.60768

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1973_num_59_1_60768

## COMMUNICATIONS DES MEMBRES

### GÉOMÉTRIE

# Aperçu des recherches de Géométrie à l'Académie royale de Belgique (1772-1972)

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

*Résumé.* — Nous indiquons dans cette note quel fut l'apport à la Géométrie dû à l'Académie royale de Belgique, en nous limitant aux travaux les plus importants et dont les auteurs sont aujourd'hui décédés.

Bien que fondée en 1772, il faut attendre 1822 pour que les recherches mathématiques faites par des membres de l'Académie ne tombent pas dans l'oubli. A cette époque, Adolphe Quetelet et Germinal Dandelin publièrent leurs recherches sur les sections du cône du second ordre et obtinrent d'élégants théorèmes connus à Paris sous le nom de théorèmes belges sur les coniques. Récemment encore il en fut question dans un article de M. Campedelli publié en 1934 dans le Periodico di Matematiche. Avant d'abandonner les Mathématiques pour la météorologie et la statistique, dont il fut le créateur, Quetelet publia des recherches sur les caustiques, question alors à l'ordre du jour comme en témoignent les travaux contemporains de Gergonne, Dupin et Sturm. Il y montre qu'une caustique par réflexion ou réfraction, pour une courbe C éclairée par un point P, est la développée d'une autre courbe C′ enveloppe des cercles dont les centres se trouvent sur C et dont les rayons sont égaux aux distances des centres au point P dans le cas de la réflexion ou sont, dans le cas de la réfraction, proportionnels aux distances des centres au point P, le rapport de proportionnalité étant l'indice de réfraction. L'introduction de cette courbe C′

fut qualifiée d'heureuse par Darboux dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (Paris, tome II, 1889, p. 281).

L'Académie avait mis au concours pour 1830 une question de Géométrie à laquelle Michel Chasles répondit par l'envoi d'un mémoire intitulé *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne suivi d'un mémoire de Géométrie sur deux principes généraux de la Science, la dualité et l'homographie.* Ce travail fut couronné et publié dans les Mémoires en 1837. Ce volumineux ouvrage, de 854 pages, eut une influence considérable sur le développement de la Géométrie. La première partie est une histoire très poussée des méthodes utilisées en Géométrie. L'auteur appelle notamment l'attention sur un géomètre belge bien oublié à l'époque: Jacques-François Le Poivre (Mons, ?-1710) qui publia en 1704 puis en 1708 une méthode de géométrie projective permettant de passer d'un cercle à une conique situés dans le même plan.

La seconde partie du mémoire de Chasles est un exposé de la théorie des homographies et des réciprocités de l'espace et de leurs applications. La base de l'exposé est analytique mais souvent, les raisonnements sont purement géométriques. C'était la première fois que ces théories étaient exposées, cela explique le succès de l'ouvrage, qui eut une réimpression en 1875. Ces questions sont aujourd'hui classiques.

Bien que ses travaux relèvent plutôt de la mécanique, Pagani, dans une courte note publiée en mars 1847, considère le trièdre attaché en un point d'une courbe gauche formé par la tangente, la normale principale et la binormale; il établit les premières des formules connues aujourd'hui sous le nom de formules de Frenet. Celui-ci les avait données dans une thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse précisément en 1847. On sait que ces formules furent retrouvées par Serret, qui ignorait le mémoire de Frenet, en 1851.

J. B. Brasseur était chargé d'enseigner la Géométrie descriptive à l'Université de Liège, à une époque où n'existait pas un cours de Géométrie projective. Désirant cependant que ses élèves soient en possession des éléments de cette dernière science, il entreprit d'en déduire ceux-ci de la méthode des projections de Monge. Il a ainsi au fond reconstitué la Géométrie projective. Son point de départ est simple. Étant donné sur une surface un faisceau de courbes C, les projections orthogonales $C_v$, $C_h$ de ces courbes sur deux plans quelconques forment deux faisceaux projectifs et le lieu des points d'intersection des courbes homologues est la projection de la section de la surface par le second bissecteur. Si par exemple la surface est une quadrique réglée et si les plans de projection sont perpendiculaires chacun à une génératrice rectiligne d'un mode de la quadrique, les projections des génératrices rectilignes de l'autre mode forment deux faisceaux de rayons projectifs et le lieu des intersections est une conique. Ces recherches furent l'objet d'un mémoire publié en 1855. Brasseur les enseignait dans un cours libre qui devait devenir le cours légal de Géométrie supérieure.

A l'époque où Joseph Plateau faisait ses expériences sur les lames liquides qui se développent à l'intérieur d'une carcasse de fil de fer préalablement plongée dans de l'eau de savon glycérinée, un ingénieur français, Ernest Lamarle, professeur à l'Université de Gand, a publié en 1865 et 1867, deux mémoires sur *la stabilité des lames minces*. Il établit que l'aire de chaque lame est un minimum parmi celles des lames qui ont le même contour, c'est-à-dire que la lame est une surface à courbure moyenne nulle. Il posait ainsi le célèbre *problème de Plateau*, qui a suscité tant de recherches érudites, notamment de R. Garnier, T. Rado et J. Douglas. Dans ses mémoires, Lamarle étudiait les cas où la carcasse est formée par les arêtes d'un polyèdre.

On doit également à Lamarle un *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral* paru en 1861 et 1863. Basé sur des considérations géométriques et cinématiques, Lamarle considère par exemple une courbe plane comme le lieu d'un point autour duquel tourne une droite. Celle-ci est la tangente à la courbe et le point en est le point de contact. La différentielle se définit comme la vitesse d'un point décrivant un certain segment de droite. Cet exposé n'eut guère de succès, il n'est d'ailleurs pas plus simple que les exposés habituels.

Dans un *Mémoire sur la théorie générale des lignes tracées sur une surface quelconque*, publié en 1868, Ph. Gilbert base ses recherches sur deux notions: la flexion et la déviation. Soit C une courbe tracée sur une surface S et M, M′ deux de ses points. La limite du rapport de l'angle fait par les plans tangents en M, M′ à la longueur de l'arc MM′ est la flexion de la surface en M suivant la direction de la courbe C. Si l'on considère une famille de courbes C′ tracées sur S, la limite du rapport de l'angle en M, M′ des courbes C′ passant par ces points à la longueur de l'arc MM′ est la déviation de la courbe C′

en M suivant la courbe C. Partant de ces notions, Gilbert retrouve les résultats de Gauss sur la courbure et d'autres propriétés.

L'Académie avait mis au concours pour 1880 une question sur les surfaces à courbure moyenne nulle. Un très important mémoire, dû à un ingénieur français, Albert Ribaucour, fut envoyé en réponse. L'auteur appelle une des surfaces en question un élassoïde et utilise dans ses recherches une méthode qu'il appelle périmorphie. Cette méthode est devenue classique et porte aujourd'hui le nom de méthode du trièdre mobile dont l'auteur fut avec Darboux, le créateur. Il est conduit à considérer des congruences isotropes, congruences de droites dont les surfaces focales sont des développables passant par le cercle imaginaire à l'infini. Il allie dans ses développements l'imaginaire au réel. A l'époque, les mémoires présentés en réponse à une question de concours devaient être anonymes et porter une devise. Ribaucour avait choisi comme devise un cercle (le réel) au centre duquel se trouvait $\sqrt{-1}$ (l'imaginaire) et en légende la devise belge: « L'union fait la force ». Cette devise est reproduite en sous-titre de son mémoire.

Nous allons maintenant abandonner l'ordre chronologique pour nous occuper de trois géomètres liégeois: François Folie, Constantin Le Paige et François Deruyts.

Le premier, élève de Brasseur, s'est occupé de géométrie au début de sa carrière pour passer ensuite à l'astronomie. Ses premières recherches furent une application du principe de Gergonne au cas où une courbe plane d'ordre $n$ passe par $mn$ des points d'intersection de deux systèmes de $m > n$ droites. L'extension à l'espace, qu'il a tentée, conduit à des surfaces particulières. Il a ensuite publié en 1881 et 1884, en collaboration avec Le Paige, une théorie des cubiques planes en considérant ces courbes comme engendrées au moyen de trois faisceaux de droites en relation trilinéaire.

La Paige s'est surtout occupé de la théorie des formes algébriques binaires et de la génération des surfaces algébriques. Une surface cubique est engendrée par trois faisceaux de plans en relation trilinéaire et est d'autre part déterminée par 19 points. En partant de ceux-ci, Le Paige est parvenu à construire les trois faisceaux de plans et la relation qui les lie, résultat remarquable. Il a également interprété géométriquement les formes binaires notamment en utilisant, pour les formes du troisième ordre, une cubique gauche. Son œuvre devait être poursuivie dans ce domaine par François Deruyts qui introduisit la représentation des formes sur une courbe rationnelle hyperspatiale. Il convient d'ajouter que vers la même époque, Castelnuovo parvint au même résultat. Deruyts s'est également occupé de la détermination des groupes de points neutres dans une involution, problème qui devait être résolu plus tard par Severi par les méthodes de la géométrie énumérative.

Le Général de Tilly s'est occupé des fondements de la géométrie et de la mécanique. Son idée peut être résumée de la façon suivante: Cinq points de l'espace étant donnés, il existe une relation entre les distances de ces points pris deux à deux. Si l'on prend un sixième point, il existe six relations entre les distances de ces six points pris cinq à cinq. Trois de ces relations doivent être une conséquence des trois autres. Dans un mémoire de 1892, de Tilly s'est efforcé de déterminer la forme de la relation des cinq points, parvenant aux trois formes qui correspondent aux géométries euclidienne, riemannienne et lobatchefskienne, mais sans parvenir à en trouver d'autres ou de démontrer qu'il n'y en a pas d'autres. Plus tard, De Donder est revenu sur cette question en la mettant en relation avec certaines recherches de Sophus Lie.

Lors du centenaire de l'Académie, en 1872, de Tilly a été chargé de faire un exposé des recherches des Membres de l'Académie.

Malgré près de vingt ans passés dans l'enseignement moyen et dans de petites villes de province dépourvues de bibliothèques scientifiques, Joseph Neuberg a laissé une œuvre remarquable. Avec Brocard et Lemoine, il a créé la Géométrie du triangle et du tétraèdre, domaine assez élémentaire sans doute, mais où il a dépensé des trésors d'ingéniosité. Il s'est aussi occupé des systèmes articulés et surtout, avec Paul Mansion, il a dirigé depuis 1880 la revue « Mathesis », qui a rendu d'inestimables services à tant de jeunes chercheurs.

La cristallographie a conduit Giuseppe Cesaro à étudier en 1891 les polyèdres superposables à leur image et, plus généralement, en 1892, des polyèdres qui peuvent occuper dans l'espace plusieurs positions distinctes en apparence. Il compète les travaux de Bravais et obtient d'intéressantes propriétés.

En 1894, en réponse à une question posée par l'Académie, Lucien Lévy a envoyé un mémoire *Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonaux* qui fut couronné. Après un exposé très complet des travaux déjà connus sur cette difficile question, l'auteur étudie les systèmes à trajectoires sphériques dans une famille et ceux qui présentent une certaine symétrie.

C'est aussi en réponse à une question posée par l'Académie en 1899 qu'un ingénieur français, M. Autonne, a envoyé un volumineux *Mémoire sur les connexes*, c'est-à-dire sur les variétés dont les éléments sont formés d'un point et d'un plan passant par le point. C'est une étude très fouillée où l'auteur pose notamment les premiers éléments de la théorie des transformations birationnelles des connexes, question qui fut reprise plus tard par Fano mais dans le cas des connexes du plan.

Clément Servais a publié de nombreux travaux sur les courbes et les surfaces algébriques, presque tous ressortissant à la géométrie projective. Les principaux de ces travaux ont porté sur les relations entre la courbure et la torsion de deux courbes se correspondant dans une projectivité et sur la Géométrie des éléments imaginaires. Dans les premiers, il établit des formules où paraissent des éléments que l'on peut choisir arbitrairement, ce qui en augmente la valeur. Dans les seconds, partant de la définition des points imaginaires donnée par von Staudt, il construit la Géométrie projective dans un espace complexe. On peut objecter à ces derniers travaux, qui ont dû coûter de gros efforts à l'auteur, que les résultats avaient déjà été obtenus par d'autres méthodes.

Les travaux les plus importants de Modeste Stuyvaert concernent la représentation des êtres algébriques par des matrices de formes. Il a obtenu sur cet objet des résultats importants, par exemple dans la représentation des courbes gauches algébriques qui ne sont pas intersections complètes de surfaces. On lui doit également de belles recherches sur les congruences linéaires de cubiques gauches. Il semble d'ailleurs que, parmi les géomètres de sa génération, c'est à lui que l'on doit les résultats les plus importants en géométrie algébrique; ils sont encore utilisés de nos jours.

Nous en arrivons maintenant à un mathématicien dont les travaux de Géométrie infinitésimale font honneur à notre pays: Alphonse Demoulin. Ses études relèvent presque toutes de cette géométrie, entendue dans le sens le plus large. Vers la fin du siècle dernier, on s'est aperçu que bien des questions traitées dans l'espace métrique, comme par exemple les études sur les suites de Laplace, restaient valables dans l'espace projectif. C'est ainsi qu'est née la Géométrie projective différentielle, où Demoulin fut un précurseur. Ses travaux sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface, sur les équations de Moutard, sur les suites de Laplace, sur bien d'autres questions relèvent de cette géométrie.

Nous avons fait allusion plus haut à propos d'un mémoire de Ribaucour, à la théorie du trièdre mobile. Élève de Darboux, Demoulin devait la manier en Maître, mais de plus, il l'avait généralisée en créant notamment une méthode du tétraèdre mobile en Géométrie projective et encore une théorie du pentasphère mobile qu'il a utilisée dans ses recherches de Géométrie conforme. Nous devons encore signaler la détermination des invariants différentiels et intégraux dans le groupe conforme et surtout de belles recherches sur les systèmes triples orthogonaux couronnées par l'Académie des Sciences de France (Prix Bordin 1911).

En 1909 l'Académie avait mis au concours une question sur les congruences de droites. Le mémoire reçu en réponse était dû à Wilczynski; c'était un travail de Géométrie projective différentielle de grande valeur. Il fut analysé par Demoulin dont le rapport est très intéressant. On devait d'ailleurs à Wilcsynski d'importants travaux sur cette géométrie.

Au concours de 1925, l'Académie demandait une contribution importante à la géométrie infinitésimale. Le mémoire reçu en réponse, dû à Graustein, fut l'objet d'un rapport de Demoulin qui proposa l'attribution du prix et l'impression du mémoire après quelques modifications suggérées par le rapporteur. C'est à la suite de son rapport que Demoulin publia sa théorie du trièdre birectangle mobile qui permettait de démontrer plus aisément certains théorèmes de Graustein et dont l'utilité devait se montrer plus tard dans d'autres questions.

Cet exposé des recherches de Géométrie dues à des Académiciens ou suscitées par l'Académie est loin d'être complet. Il nous a paru que pour mettre en évidence le rôle de l'Académie, il importait de se borner aux questions essentielles plutôt que de s'attarder à des questions de détails. Qu'il nous soit permis de saluer respectueusement la mémoire des savants dont il vient d'être question et dont plusieurs m'honoraient de leur amitié.