Groupe I/b : Rapports des Commissaires. Rapports sur le mémoire de Mme J. Goffar-Lombet

Lucien Godeaux, Théophile Henri Joseph Lepage, F.-J. Bureau

Concours annuel de 1973

Groupe I/b

Rapports sur le mémoire de M^{me} J. Goffar-Lombet

Rapport du premier commissaire

Le Mémoire de M^{me} J. Goffar-Lombet concerne l'étude des systèmes différentiels non linéaires dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. Nous dirons que de tels systèmes (ainsi que leur intégrale générale) sont « stables ».

Avant d'analyser le mémoire qui nous est soumis et parce que le problème posé est actuellement peu étudié, il nous paraît utile de rappeler brièvement les diverses étapes qui ont amené les mathématiciens à se poser d'une manière naturelle et inévitable le problème de la recherche des systèmes différentiels stables.

A la suite des recherches d'Abel et de Jacobi sur les fonctions elliptiques, recherches renouvelant les travaux d'Euler et de Legendre, il était bien naturel de rechercher toutes les équations différentielles non linéaires du premier ordre, à coefficients constants, intégrables par des fonctions uniformes.

Ce problème, résolu par Briot et Bouquet, a donné lieu à un important théorème d'Hermite.

Mais c'est L. Fuchs qui considérant encore des équations différentielles non linéaires du premier ordre, à coefficients variables, a posé le problème d'une manière nouvelle: au lieu de se borner à rechercher des équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme, il s'est proposé de trouver des équations dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. Les recherches de Fuchs, complétées par Poincaré et Painlevé, montrèrent que toutes les équations de la classe envisagée s'intègrent par des fonctions connues. Ainsi, pour obtenir des fonctions nouvelles, irréductibles aux fonctions déjà connues, il est nécessaire de considérer des équations différentielles du second ordre au moins. C'est ce que fit Picard, dans des cas particuliers, dans un mémoire célèbre, fondamental à plus d'un titre. A la même époque, Poincaré, inspiré par un mémoire très incomplet de Fuchs et sans doute aussi par des recherches d'Hermite, découvrait les fonctions fuchsiennes, fonctions uniformes vérifiant des équations différentielles non linéaires du troisième ordre.

Mais, le problème posé par Picard exigeait d'autres méthodes et comme le remarque Poincaré, « on pouvait craindre que l'étude des équations d'ordre supérieur ne conduisit aussi à des résultats négatifs et que l'idée ingénieuse de Fuchs ne fut condamnée à la stérilité ». Il était réservé à Painlevé de montrer que les craintes de Poincaré n'étaient pas fondées. Mais, ce résultat n'a été obtenu que grâce à une singulière perspicacité et à des efforts persévérants déployés pendant de nombreuses années.

Les recherches de Painlevé, complétées par B. Gambier, terminent en un certain sens, l'étude des équations différentielles non linéaires du second ordre, mais linéaires en $\ddot{y}$. Elles introduisent six classes d'équations stables dont les intégrales sont, en général, irréductibles aux fonctions connues.

Ces résultats de Painlevé et de Gambier montrent que pour obtenir de nouvelles fonctions, il faut considérer des équations différentielles d'ordre trois au moins ou des systèmes différentiels.

L'étude de ce nouveau problème a été commencée par J. Chazy et par M. R. Garnier qui ont obtenu des résultats remarquables. Mais les questions qui restent à résoudre sont particulièrement difficiles et une certaine lassitude se manifeste, les problèmes pendants laissant peu d'espoirs aux jeunes chercheurs. C'est que la méthode imaginée par Painlevé nécessite des calculs étendus et les auteurs sont bien forcés de se contenter de l'affirmation des résultats sans indiquer leur démonstration. C'est pour cette raison que j'ai, en 1939, préconisé une autre méthode permettant de simplifier les procédés de Painlevé. Cette nouvelle méthode n'a été complètement appliquée que plus tard dans un mémoire donnant la démonstration des résultats de Painlevé et de Gambier. Ce mémoire (désigné par M.I.) a été souvent utilisé par M^me^ J. Goffar-Lombet dans le travail qui nous est soumis.

Pour de plus amples détails concernant les relations que le problème des équations et des systèmes stables a avec d'autres questions très classiques (problème de Riemann; surfaces minima; par exemple) nous renverrons à la très belle préface que M. R. Garnier a écrite pour les Œuvres de Painlevé et dont la publication est imminente.

L'étude des équations différentielles stables du second ordre introduit accessoirement un certain nombre de systèmes différentiels du second ordre. L'étude systématique de ces systèmes a été posée par E. Goursat. Dans une note (en bas de page) de son cours d'Analyse mathématique, Goursat remarque qu'il est facile, en partant d'équations différentielles linéaires, de former des systèmes différentiels qui généralisent l'équation de Riccati et dont les intégrales n'ont pas d'autres points singuliers mobiles que des pôles. Mais, observe Goursat, ce n'est pas là le système différentiel le plus général de la forme

$$\dot{y} = P(y, z; x), \quad \dot{z} = Q(y, z; x), \tag{1}$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de y et de z, qui possède cette propriété. Un nouveau problème est ainsi posé et il comprend comme cas très particulier celui que Painlevé et Gambier ont résolu pour les équations différentielles du second ordre.

C'est M. R. Garnier, à qui Goursat avait autrefois signalé cette question, qui le premier, a abordé ce problème, assez récemment d'ailleurs. Conformément aux idées de Painlevé, il y a lieu de considérer dans une première étude, le système réduit du système (1), c'est-à-dire le système (1) où les seconds membres sont supposés homogènes en y et en z et indépendants de x. C'est ce problème que M. R. Garnier a résolu en 1959; il comporte une infinité de solutions et n'introduit que des fonctions connues.

Le problème concernant les systèmes (1) généraux ne paraît pas avoir été étudié jusqu'ici et est beaucoup plus ardu. Il peut s'énoncer ainsi: déterminer explicitement les systèmes différentiels stables de la forme (1); intégrer les systèmes obtenus et déterminer la structure de leurs solutions. C'est à ce problème que le mémoire de Mme Goffar-Lombet apporte une contribution.

En raison des difficultés inhérentes à la question, il était nécessaire de circonscrire le problème; c'est ce qu'a fait Mme J. Goffar en se limitant au cas des systèmes différentiels polynomiaux (P et Q sont des polynomes en y et en z à coefficients analytiques en x) et en choisissant parmi les systèmes réduits ceux qui paraissent les plus simples et susceptibles de fournir des résultats complets.

Dans le premier chapitre de son mémoire, Mme Goffar donne la solution du problème lorsque P et Q sont des polynomes homogènes en y et en z, à coefficients constants; en utilisant systématiquement les résultats du mémoire M.I., elle simplifie un peu l'exposé de M.R. Garnier et en retrouve les résultats.

Elle considère ensuite les cas où les termes les plus élevés de P et de Q s'écrivent

$$P = a(x) s y^2 z^s, \qquad Q = -a(x) y z^{s+1}$$

ou bien

$$P = a(x)(1 + ns) y^2 z^s, \qquad Q = a(x)(1 - n) y z^{s+1};$$

n est un entier, $s = 1$ ou 2; $a(x)$ est une fonction analytique de x.

Un changement de la variable indépendante et une transformation linéaire sur y et z permettent de répartir les systèmes étudiés en classes d'équivalence que l'on peut rattacher à des équations différentielles stables du second ordre. Cette classification introduit deux polynomes D(z) et A(z) respectivement d'ordre 3 et 2 (ou 2 et 1).

Dans le troisième chapitre, M^{me} Goffar considère le cas où D(z) est de degré 3 et possède soit trois racines distinctes, soit une racine double et une racine simple, soit une racine triple. Il ne nous est pas possible d'entrer ici dans les détails techniques que comporte l'étude de M^{me} Goffar. Disons seulement que c'est en utilisant habilement les résultats du mémoire M.I. — utilisation qui est loin d'être immédiate et qui comporte bien des difficultés — que M^{me} Goffar détermine complètement les systèmes stables correspondant aux polynomes D(z) et qu'elle construit leur intégrale générale à l'aide des solutions des diverses équations différentielles du second ordre de Painlevé ou de fonctions connues.

Le quatrième chapitre est consacré au cas où D(z) est de degré 2. En utilisant la même méthode, M^{me} Goffar résout encore complètement pour ce cas, le problème posé.

Certes, tous les systèmes différentiels stables polynomiaux du second ordre ne sont pas déterminés. On peut d'ailleurs douter que ces systèmes sont en nombre fini puisqu'il existe une infinité de systèmes réduits. En outre, et bien que le procédé utilisé par M^{me} Goffar soit susceptible de nouvelles applications, il est plus que probable qu'une étude plus complète exigera de nouvelles méthodes.

Nous pensons cependant que le mémoire de M^{me} J. Goffar-Lombet répond bien à la question posée et que sa valeur scientifique, son originalité et son intérêt sont évidents. Nous proposons donc que le prix du Concours annuel 1973 soit attribué à l'Auteur et que son mémoire soit imprimé dans les recueils de l'Académie.

F. J. Bureau

Rapport du deuxième commissaire

Le travail de M^{me} Goffar-Lombet, en réponse à la question « Recherches sur les équations différentielles non linéaires dans le domaine complexe », intitulé *Sur des systèmes polynomiaux d'équations différentielles dont l'intégrale générale est à points critiques fixes*, est une contribution à l'étude des systèmes différentiels du 2^{d} ordre dont l'intégrale générale est uniforme.

A l'heure actuelle, il est bien connu que, malgré les profondes recherches de P. Painlevé, de R. Garnier et celles de notre confrère Fl. Bureau, l'on soit encore loin d'une solution complète dans ce domaine. Aussi bien, doit-on se limiter à l'étude de certains types, particulièrement simples, permettant une analyse approfondie.

S'inspirant d'une méthode de recherche de Fl. Bureau, Mme Goffar-Lombet considère quelques types d'équations dont elle poursuit l'analyse avec compétence et succès. Nous estimons que son travail mérite d'être pris en considération et nous proposons que le prix de l'Académie lui soit attribué.

Th. LEPAGE

RAPPORT DU TROISIÈME COMMISSAIRE

Je me rallie aux rapports et conclusions de mes savants Confrères: Attribution du prix et impression du mémoire dans la collection in-8°.

L. GODEAUX