SOPRA UN FASCIO SOVRABBONDANTE DI CURVE PIANE

(Nota di L. GODEAUX - Liegi)

Scopo di questa nota è di dare un esempio di un fascio sovrabbondante di curve algebriche piane di ordine $12n+6$ e di genere $36n^2+18n+1$, di cui i $18n+9$ punti base sono sui lati di un triangolo. Un caso particolare di questo fascio è il fascio di sestiche di Halphen di cui i nove punti-base doppi sono tre a tre sui lati di un triangolo.

1. — Consideriamo il fascio di curve $|C|$ di ordine $12n+6$, di equazione

$$x_1^{12n+6}+x_2^{12n+6}+x_3^{12n+6}-2(x_2\,x_3)^{6n+3}-2(x_3\,x_1)^{6n+3}-$$

$$-2(x_1\,x_2)^{6n+3}+\lambda(x_1\,x_2\,x_3)^{4n+2}=0\,.$$

La base di questo fascio è costituata dai punti

$$x_1=0\ ,\ x_2^{6n+3}-x_3^{6n+3}=0\,,$$

$$x_2=0\ ,\ x_3^{6n+3}-x_1^{6n+3}=0\,,$$

$$x_3=0\ ,\ x_1^{6n+3}-x_2^{6n+3}=0\,,$$

cioè da $18n+9$ punti.

Questi punti sono doppi per le curve C, come si vede subito.

Consideriamo uno di questi punti, e sia esso P, di coordinate $1\,,\varepsilon\,,0$ dove ε è una radice di ordine $6n+3$ dell'unità.

Le tangenti alle curve C in questo punto P sono date da

$$(\varepsilon x_1-x_2)^2=0\,;$$

P è dunque un punto di regresso.

Se noi poniamo $x_2 = \varepsilon x_1$ nella equazione delle curve C, abbiamo

$$x_3^{4n+2}(\lambda x_1^{8n+4} - 4x_1^{6n+3}x_3^{2n+1} + x_3^{8n+4}) = 0,$$

dunque la tangente alle C nel punto P incontra queste curve in $4n+2$ punti coincidenti in P. Vogliamo dimostrare che le curve C hanno in P un punto doppio con $2n$ punti doppi successivi infinitamente vicini sulla retta $\varepsilon x_1 - x_2 = 0$.

2. — Consideriamo una curva razionale γ di equazioni parametriche

$$\rho x_1 = \alpha + t^{2n+1}A,$$

$$\rho x_2 = \beta + t^{2n+1}B,$$

$$\rho x_3 = tC,$$

dove abbiamo posto

$$\alpha = 1 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{2n} t^{2n},$$

$$\beta = \varepsilon + \beta_1 t + \cdots + \beta_{2n} t^{2n},$$

$$A = a_0 + a_1 t + \cdots + a_m t^m,$$

$$B = b_0 + b_1 t + \cdots + b_m t^m,$$

$$C = c_0 + c_1 t + \cdots + c_{m+n2} t^{m+n2}.$$

La curva γ contiene il punto P per $t=0$.

Per scrivere che questa curva incontra la retta $\varepsilon x_1 - x_2 = 0$ in $2n+1$ punti coincidenti con P, occorre e basta avere

$$\beta_1 = \alpha_1 \varepsilon, \beta_2 = \alpha_2 \varepsilon, \ldots, \beta_{2n} = \alpha_{2n} \varepsilon.$$

Le equazioni della curva γ sono allora

$$\rho x_1 = \alpha + t^{2n+1}A,$$

$$\rho x_2 = \alpha\varepsilon + t^{2n+1}B,$$

$$\rho x_3 = tC.$$

Poniamo, nella equazione delle curve C, questi valori per x_1, x_2, x_3; abbiamo una equazione nella quale mancano i termini in $t^0, t, \ldots t^{4n+1}$. Il coefficiente di t^{4n+2} è

$$\binom{12n+6}{2}\alpha^{4n}(a_0^2+b_0^2\,\varepsilon^{6n+1})-2\left[\binom{6n+3}{2}a^{4n}(a_0^2+b_0^2\,\varepsilon^{6n+1})+\right.$$

$$\left.+(6n+3)^2\,\alpha^{4n}\,a_0\,b_0\right]+\lambda c_0^{6n+2}\,\varepsilon^{4n+2}\,.$$

Noi ne concludiamo che il punto P è doppio per le curve C e che queste curve hanno $2n$ punti doppi infinitamente vicini successivi a P sulla tangente alle cnrve nel punto P. Vi sono due curve γ che incontrano le curve C in $2n+3$ punti coincidenti con P.

Dunque: *La base del fascio* | C | *è formata di* $18n+9$ *punti doppi,* $6n+3$ *sopra ogni lato di un triangolo; ad ognuno di questi punti sono infinitamente vicini successivi, sulla tangente,* $2n$ *punti doppi di cui l'ultimo è ordinario. Le tangenti alle curve* C *in ognuno di questi punti-base contengono il vertice opposto del triangolo.*

Si vede che si hanno ben così tutti i punti-base del fascio, perchè

$$(18n+9)\,(8n+4)=(12n+6)^2.$$

3. — Cerchiamo adesso quante sono le condizioni imposte ad una curva per avere un punto doppio della specie di cui sopra.

Scriviamo l'equazione di una curva che ha un punto doppio nella origine delle coordinate e $2n$ punti doppi infinitamente vicini successivi sulla retta $y=0$.

La retta $y=0$ deve incontrare la curva in $4n+2$ punti coincidenti con l'origine:

Il prodotto di $2n$ trasformazioni quadratiche

$$x=x',\quad y=x'^{2n}\,y'$$

deve fare corrispondere alla curva una curva con punto doppio nella origine delle coordinate $x'=0, y'=0$.

La curva ha dunque per equazione

$$y^2\,[\,1+\varphi_1(x\,,y)+\varphi_2\,(x,y)+\cdots+\varphi_{2n-1}\,(x\,,y)]+$$

$$+\,y\,[\varphi_{2n+1}\,(x\,,y)+\varphi_{2n+2}\,(x\,,y)\cdots+\varphi_{4n}\,(x\,,y)+$$

$$+\,\varphi_{4n+2}\,(x\,,y)+\cdots=0\,,$$

essendo $\varphi_i\,(x\,,\,y)$ uno polinomio intero omogeneo in $x\,,y$ di grado i.

Si vede così che il numero delle condizioni cercato è $6n+3$.

4. — La dimensione virtuale del sistima lineare $|\,C\,|$ è

$$\frac{1}{2}(12n+6)(12n+9)-3(6n+3)(6n+3)=-6n(6n+3)\leqq 0\,,$$

dunque il fascio $|\,C\,|$ è sovrabbondante.

Il genere delle curve C vale

$$\frac{1}{2}(12n+5)(12n+4)-3(6n+3)(2n+1)=36n^2+18n+1.$$

Per $n=0$, si ha un particolare fascio di Halpen di curve del sesto ordine.

Liegi, il 22 giugno 1952.