(Dai « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », Serie V, Vol. XIII, Fasc. 2-3, Roma 1954)

Sur l'existence de surfaces multiples possédant des points de diramation de structure donnée

par **LUCIEN GODEAUX** (Liège)

Dans des travaux récents, nous avons complété l'étude des involutions cycliques d'ordre premier p appartenant à une surface algébrique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis et détérminé la singularité des points de diramation d'une surface image de l'involution (**1**).

Les points unis de l'involution peuvent être de deux espèces suivant que, dans le domaine d'un tel point, l'involution détermine l'identité (points de première espèce) ou non (points de seconde espèce). Un point de diramation correspondant à un point uni de première espèce est multiple d'ordre p pour la surface image, le cône tangent étant rationnel et irréductible. Un point de diramation correspondant à un point uni de seconde espèce a, pour la surface image, une multiplicité comprise entre 1 et p, le cône tangent se scindant en deux, trois ou quatre cônes rationnels.

Il importe cependant de montrer que les singularités des points de diramation pour la surface image qui ont été rencontrées, peuvent effectivement se présenter. C'est l'objet de cette note, où nous nous limitons aux points de diramation correspondant aux points unis

(1) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8⁰ de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 1-80); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Centre Belge de Recherches mathématiques, Second Colloque de Géometrie algébrique, Liège, 1952, pp. 225-241); *Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie d'une surface multiple* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1953, pp. 1013-1023, 1087-1093; 1954, pp. 81-86, 200-208, 355-370).

de seconde espèce [1]. Le cas où les points de diramation correspondent aux points unis de première espèce peut se traiter de la même manière et est d'ailleurs plus simple. Nous commencerons par rappeler brièvement les résultats que nous avons établis dans les travaux cités plus haut.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier $p > 2$, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par Φ une surface normale image de cette involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés, par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ et par $|C|$ le système linéaire formé par les transformées sur F des courbes Γ. Nous avons montré que l'on peut toujours construire Φ de telle sorte que le système linéaire $|C|$ appartienne à un système linéaire complet contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. Dans ces conditions, nous déterminons la structure d'un point de diramation de la surface Φ, c'est-à-dire l'ensemble des courbes auquel ce point est équivalent au point de vue des transformations birationnelles, de la manière suivante :

Soit A un point uni de seconde espèce de l'involution, supposé simple pour la surface F, et A' le point de diramation qui lui correspond sur la surface Φ.

Au point A sont attachés deux entiers positifs α, β, compris entre 1 et p, tels que

$$\alpha \beta - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

L'involution déterminée par I dans le faisceau des tangentes à la surface F en A peut être représentée par les équations

$$x_1' : x_2' = x_1 : \varepsilon^{\alpha-1} x_2 , \qquad \text{ou} \qquad x_1' : x_2' = \varepsilon'^{\beta-1} x_1 : x_2 ,$$

où ε et $\varepsilon' = \varepsilon^{\alpha}$ sont des racines primitives d'ordre p de l'unité.

On considère le système $|C'|$ formé par les courbes C passant par A. Les courbes C' ont en A, λ_1 tangentes confondues avec une

[1] Nous avons déjà attiré l'attention sur la construction dont il va être question dans une note *Sur la construction de modèles de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1948, pp. 56-61).

des directions unies ($x_1 = 0$) issues de A et μ_1 tangentes confondues avec l'autre direction unie ($x_2 = 0$) ; elles ont donc la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$ en A.

Les nombres positifs λ_1, μ_1 satisfont aux congruences

$$\lambda_1 + \alpha \mu_1 \equiv 0\,, \ \mu_1 + \beta \lambda_1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)\,,$$

la somme $\lambda_1 + \mu_1$ étant la plus petite possible.

Supposons que l'on ait

$$\lambda_1 + \alpha \mu_1 = h_1 p\,, \qquad \mu_1 + \beta \lambda_1 = h_2 p\,,$$

où $h_1 \geq 1$, $h_2 \geq 1$.

Posons

$$p = a_1 a + b_1 = b_2 \beta + a_2 \qquad (b_1 < \alpha\,, a_2 < \beta)$$

et soient m, n des entiers tels que

$$m \alpha < h_1 b_1 < (m+1)\alpha\,, \qquad n \beta < h_2 a_2 < (n+1)\beta.$$

Dans ces conditions, le point A' est multiple d'ordre $a_1 + m + n + b_2$ pour la surface Φ et le cône tangent en ce point à cette surface se compose de quatre cônes rationnels : un cône d'ordre a_1, un cône d'ordre m rencontrant le précédent suivant une droite, un cône d'ordre n rencontrant le précedént suivant une droite et un cône d'ordre b_2 rencontrant le précédent suivant une droite. En dehors de ces trois droites, il n'y a aucune droite commune à deux de ces quatre cônes. Il peut exister des suites de points doubles infiniment voisins successifs du point A, le premier des points d'une suite se trouvant évidemment sur une des trois droites dont il vient d'être question.

2. Ces points rappelés, nous allons construire une surface F contenant une involution cyclique dont tous les points unis, en nombre fini, sont de la même nature que le point A qui vient d'être considéré.

Considérons les solutions en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + \alpha \mu \equiv 0\,, \qquad \mu + \beta \lambda \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

telles que $\lambda + \mu \leq p$ (une solution de l'une de ces congruences est solution de l'autre).

Si nous posons $p = 2\nu + 1$, il est facile de voir que ces solutions sont au nombre de $\nu + 2$. Nous les désignerons par

$$\lambda_1, \mu_1; \lambda_2, \mu_2; \ldots; \lambda_i, \mu_i; \ldots; \lambda_{\nu+1} = p, \mu_{\nu+1} = 0; \lambda_{\nu+2} = 0, \mu_{\nu+2} = p.$$

Cela étant, considérons dans un espace $S_{\nu+4}$ à $\nu + 4$ dimensions, l'homographie H, cyclique de période p, d'équations

$$x'_1 : x'_2 : \ldots : x'_{\nu+2} : x'_{\nu+3} : x'_{\nu+4} = x_1 : x_2 : \ldots : x_{\nu+2} : \varepsilon\, x_{\nu+3} : \varepsilon^a\, x_{\nu+4}.$$

Cette homographie possède comme axes ponctuels l'espace $S_{\nu+2}$ $(x_{\nu+3} = 0,\ x_{\nu+4} = 0)$ et les points $O_{\nu+3}$ $(x_1 = 0, \ldots, x_{\nu+2} = 0,\ x_{\nu+4} = 0)$ et $O_{\nu+4}$ $(x_1 = 0, \ldots, x_{\nu+2} = 0,\ x_{\nu+3} = 0)$.

Désignons ensuite par $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+2})$ une forme algébrique de degré $\lambda_i + \mu_i$.

Considérons la surface F d'équations

$$(1) \qquad x_{\nu+3}^{\lambda_1} x_{\nu+4}^{\mu_1} = \varphi_1,\ x_{\nu+3}^{\lambda_2} x_{\nu+4}^{\mu_2} = \varphi_2, \ldots, x_{\nu+3}^{\lambda_\nu} x_{\nu+4}^{\mu_\nu} = \varphi_\nu,$$

$$x_{\nu+3}^{p} = \varphi_{\nu+1},\ x_{\nu+4}^{p} = \varphi_{\nu+2}.$$

Cette surface F est transformée en soi par l'homographie H et celle-ci détermine, sur la surface, une involution I d'ordre p, possédant comme points unis les points communs aux $\nu + 2$ hypersurfaces

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_\nu = 0,\ \varphi_{\nu+1} = 0,\ \varphi_{\nu+2} = 0,$$

dans l'espace $S_{\nu+2}$. On peut évidemment choisir les formes φ_i de telle sorte que ces points unis soient en nombre fini.

Soient A un de ces points, $y_0, y_1, \ldots, y_{\nu+2}$, 0, 0 ses coordonnées. Le plan tangent à la surface F en A est donné par

$$x_0 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_0} + x_1 \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} + \ldots + x_{\nu+2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_{\nu+2}} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, \nu + 2).$$

Ce plan passe par les points $O_{\nu+3}$, $O_{\nu+4}$ et dans le faisceau des tangentes à F en A, H détermine l'homographie

$$x'_{\nu+3} : x'_{\nu+4} = x_{\nu+3} : \varepsilon^{a-1}\, x_{\nu+4}.$$

3. Les hypersufaces d'ordre p, ne contenant pas F, forment un système linéaire contenant p systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution d'ordre p engendrée dans $S_{\nu+4}$ par l'homographie H. Ces systèmes découpent, sur F, p systémes linéaires partiels de courbes composés au moyen de l'involution I. Ces systèmes peuvent s'obtenir de la manière suivante :

Désignons par C les sections hyperplanes de F, par C_0 les sections de F faites par les hyperplans passant par $O_{\nu+3}$, $O_{\nu+4}$, par C_1 la section faite par l'hyperplan $x_{\nu+3}=0$, par C_2 la section faite par l'hyperplan $x_{\nu+4}=0$.

Aux systèmes linéaires $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ sont respectivement attachés les nombres $\varepsilon^0=1$, ε, ε^a.

Considérons maintenant les courbes

$$p\,C_0\,,\ (p-1)\,C_0+C_1\,,\ (p-2)\,C_0+2\,C_1\,,\ldots,\ C_0+(p-1)\,C_1.$$

A ces courbes sont respectivement attachés les nombres $\varepsilon^0=1$, ε, ε^2, ..., ε^{p-1}. Il leur correspond sur Φ des courbes qui appartiennent à p systèmes linéaires complets et distincts. Si nous désignons par $\overline{C}$ les sections de F par les hypersurfaces d'ordre p, nous pouvons désigner les systèmes qui correspondent sur F aux p systèmes qui viennent d'être considérés sur Φ par $|\overline{C}_0|$, $|\overline{C}_1|$, ..., $|\overline{C}_{p-1}|$, le système $|\overline{C}_i|$ contenant les courbes $(p-i)\,C_0+i\,C_1$.

Observons que le système $|\overline{C}_0|$ est dépourvu de points-base, mais que les systèmes $|\overline{C}_1|$, ..., $|\overline{C}_{p-1}|$ ont pour points-base les points unis de l'involution I. En effet, la courbe C_1 passe par les points unis de I (de même que la courbe C_2).

Les courbes

$$(p-1)\,C_0+C_2\,,\ (p-2)\,C_0+2\,C_2\,,\ldots,\ C_0+(p-1)\,C_2$$

déterminent évidemment, dans un certain ordre, les systèmes $|\overline{C}_1|$, $|\overline{C}_2|$, ..., $|\overline{C}_{p-1}|$.

Les cônes d'ordre p ayant pour sommet la droite $O_{\nu+3}\,O_{\nu+4}$ découpent sur F des courbes $\overline{C}_0$, mais on n'obtient pas ainsi le système $|\overline{C}_0|$ complet, car ce système contient également les courbes

$$p\,C_1\,,\ p\,C_2\,,\ b_1\,C_1+a_1\,C_2\,,\ b_2\,C_1+a_2\,C_2\,.$$

4. Sur la surface F, le système linéaire $|\overline{C}|$ satisfait aux conditions rappelées au début. Si r est la dimension du système

$|\overline{C}_0|$, en rapportant projectivement les courbes $\overline{C}_0$ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, nous obtenons donc un modèle projectif de la surface Φ, normal, sur lequel les points de diramation sont isolés et présentent la structure indiqué plus haut. Ainsi se trouve démontrée l'existence d'une surface multiple ayant des points de diramation dont la structure est assignée.

On peut, dans le cas actuel, obtenir un autre modèle projectif de la surface, modèle que nous désignerons par Φ_0. Il suffit de projeter la surface F à partir de la droite $O_{\nu+3}$ $O_{\nu+4}$ sur l'espace $S_{\nu+2}$. On obtiendra les équations de Φ_0 en éliminant $x_{\nu+3}$, $x_{\nu+4}$ entre les équations (1) de la surface F.

Les points de diramation de la surface Φ_0, qui coïncident actuellement en position avec les points unis de l'involution I, seront de multiplicité $a_1 + m + n + b_2$ pour la surface Φ_0 et le cône tangent présentera la même configuration que celle qui a été donnée plus haut. Appelons en effet C_0' les courbes C_0 passant par un point uni A de I sur F et $\overline{C}_0'$ les courbes $\overline{C}_0$ possédant la même propriété. Parmi les courbes $\overline{C}_0'$ se trouvent les courbes formées d'une courbe C_0' et de $p - 1$ courbes C_0 ne passant pas par A et les courbes C_0' et $\overline{C}_0'$ ont donc le même comportement en A, d'où la propriété énoncée.

Appelons Γ_0 les sections hyperplanes de la surface Φ_0 et Γ_1, Γ_2 les courbes qui correspondent sur cette surface aux courbes C_1, C_2. Les courbes Γ_1, Γ_2 satisfont aux relations fonctionnelles

$$p\,\Gamma_0 \equiv p\,\Gamma_1 + \Delta_1, \qquad p\,\Gamma_0 \equiv p\,\Gamma_2 + \Delta_2,$$

Δ_1 et Δ_2 étant des combinaisons linéaires des composantes des points de diramation que nous avons déterminées ailleurs dans le cas général ([1]).

Projectivement, ces relations signifient que parmi les hypersurfaces de $S_{\nu+2}$ découpant sur Φ_0 le système $p\,\Gamma_0$ et passant par les points de diramation, il en est deux qui ont un contact d'ordre $p - 1$ avec Φ_0 en tout point d'intersection.

[*Entrata in redazione il 3 giugno 1954*].

([1]) *Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1953, pp. 77-84).