Alger, Mathématiques.
Tome II, n° 2, 1955.

Lucien GODEAUX (Liége).

REMARQUE SUR LA SURFACE DU QUATRIÈME ORDRE POSSÉDANT UN POINT DOUBLE INFLEXIONNEL

Sommaire. — La surface quartique ayant pour seule singularité un point double inflexionnel est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genre $p_a = P_4 = 1$, dont on construit une image projective dans S^9. Détermination des trois homographies 2 à 2 permutables qui conservent cette surface.

La lecture de deux notes récentes de MM. M. Dedo et B. D'orgeval [1] nous a remis en mémoire des recherches déjà anciennes sur les involutions du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ [2] Nous nous proposons de démontrer dans cette note qu'*une surface du quatrième ordre possédant comme seule singularité un point double inflexionnel, est l'image d'une involution du second ordre appartenant à une surface de genres* $p_a = P_4 = 1$.

Nous déterminerons en outre une image projective de la surface contenant cette involution.

---

(1) M. Dedo, *Una classica superficie del quarto ordine ed eleganti questioni ad essa collegate* (Periodico di Matematiche, 1953, pp. 104-128, 176-185, 207-228).
B. d'Orgeval, *A propos des surfaces du 4e ordre possédant des points doubles inflexionnels* (Publications scientifiques de l'Université d'Alger, série A, Sciences mathématiques, 1954, volume I, pp. 307-311).

(2) L. Godeaux, *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312).

1. La surface Φ, du quatrième ordre, possédant un point double inflexionnel à l'infini sur l'axe des z, sans autre singularité, a une équation de la forme

$$z^2 f_2(x, y) + f_4(x, y) = 0,$$

où $f_2 = 0$, $f_4 = 0$ sont respectivement les équations d'une conique et d'une quartique que nous supposerons générales et se coupant en huit points distincts. Cette surface est birationnellement équivalente à un plan double dont la courbe de diramation se compose des courbes $f_2 = 0$, $f_4 = 0$.

Considérons les équations

$$u^2 = f_2(x, y), \qquad v^2 = f_4(x, y).$$

Dans l'espace à quatre dimensions (x, y, u, v), ces équations représentent une surface F transformée en soi par trois homographies harmoniques

$$x' = x, y' = y, u' = -u, v' = -v, \qquad (T)$$
$$x' = x, y' = y, u' = -u, v' = v; \qquad (T_1)$$
$$x' = x, y' = y, u' = u, v' = -v, \qquad (T_2)$$

deux à deux permutables. Ces homographies engendrent sur F une involution I_4, d'ordre quatre, composée au moyen de trois involutions du second ordre :

L'involution I_2, engendrée par T, ayant comme points unis les huit points

$$f_2(x, y) = 0, \qquad f_4(x, y) = 0$$

et dont une image est la surface Φ.

L'involution I_2', engendrée par T_1, ayant la courbe unie $f_2 = 0$ et dont une image est la surface Φ_1, d'équation

$$v^2 = f_4(x, y).$$

L'involution I_2'', engendrée par T_2, ayant la courbe unie $f_4 = 0$ et dont une image est la surface Φ_2,

$$u^2 = f_2(x, y).$$

On peut obtenir l'image de l'involution I_2 en posant

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = i\frac{v}{u},$$

d'où

$$z^2 = -\frac{v^2}{u^2} = -\frac{f_4}{f_2}.$$

L'involution I_2 ne présentant que huit points unis et la surface Φ étant de genres $p_a = P_4 = 1$, la surface F est également de genres $p_a = P_4 = 1$.

2. Dans la correspondance $(1, 2)$ entre les surfaces Φ et F, la courbe de diramation sur Φ est constituée par les huit droites communes aux cônes

$$f_2(x, y) = 0, \qquad f_4(x, y) = 0,$$

droites que nous désignerons par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_8$.

Les sections planes Γ_1 de la surface Φ rencontrent ces droites en huit points; elles sont de genre trois donc il leur correspond sur F des courbes C_1 de genre neuf. Le modèle projectif de F dont les courbes C_1 sont *des* sections hyperplanes est donc une surface d'ordre 16, à courbes C, sections hyperplanes de genre 9, appartenant à un espace S_9 à neuf dimensions.

Sur cette surface, l'involution I_2 est déterminée par une homographie harmonique, homologue de T et que nous désignerons encore par T, ayant deux axes ponctuels ξ_3, ξ_5, respectivement de dimensions trois et cinq. Les courbes C_1 sont découpées sur F par les hyperplans passant par ξ_5 et cet espace coupe F aux huit points unis de I_2. Les courbes découpées par les hyperplans passant par ξ_3, courbes que nous désignerons par C_0, forment un système de dimension cinq, appartenant à I_2, mais dépourvu de points-base.

Les courbes Γ_0, qui correspondent sur Φ aux courbes C_0, satisfont à la relation fonctionnelle

$$2\Gamma_0 = 2\Gamma_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_8.$$

Sur Φ, les courbes Γ_0 sont donc découpées par des quadriques ne rencontrant pas les droites $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_8$ en des points variables, c'est-à-dire par les cônes du second ordre de sommet $0(x = y = z = 0)$. Les courbes Γ_0 sont de genre cinq, ce qui résulte d'ailleurs du fait que Φ est de genres $p_a = P_4 = 1$ et qu'elles forment un système de dimension cinq.

Sur le plan double équivalent à Φ, les courbes Γ_0 sont représentées par les coniques doubles et les courbes Γ_1 par les quartiques

$$(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3)^2 f_2 + \lambda_4 f_4 = 0,$$

passant par les huit points de diramation et touchant $f_4 = 0$ en quatre points.

3. Revenons à la surface F d'ordre 16 de S_9. Nous désignerons par G_2, G_4 les courbes qui correspondent sur cette surface à la conique $f_2 = 0$ et à la quartique $f_4 = 0$.

Aux droites doubles du plan double équivalent à Φ, ou, si l'on préfère, aux sections de Φ par les plans passant par O, correspondent sur F des courbes D_0 d'ordre huit et de genre trois. Les courbes D_0 appartiennent à un système complet $|D|$, de dimension trois, par conséquent chaque courbe D, ou D_0, appartient à un espace linéaire à cinq dimensions. Les courbes D_0 rencontrent la courbe G_2 en quatre points, car à G_2 correspond sur Φ la courbe infiniment petite constituant le domaine du point O. Désignons cette courbe par Δ_1.

Si nous appelons Δ_0 les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes D_0, on a

$$2\Delta_0 = 2\Delta_1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_8,$$

donc G_2 est une courbe de $|D|$. Dans $|D|$, T détermine une homographie harmonique ayant pour éléments unis le système $|D_0|$ et la courbe G_2. Cette courbe est donc de genre cinq, ce que l'on vérifie aisément en utilisant la formule de Zeuthen.

En rapportant projectivement les courbes D aux plans de l'espace, on obtient comme modèle projectif de F la quadrique double Φ_2 ayant comme courbe de diramation la section de cette quadrique par $f_4 = 0$.

Aux coniques du plan des x, y correspondent sur la quadrique Φ_2 les sections de celle-ci par les cônes du second ordre de l'espace. Ces sections appartiennent au système complet, de dimension huit, découpé par les quadriques de l'espace. On en conclut que dans le système $|C|$, il y a un système linéaire de dimension 8 appartenant à l'involution I_2'', d'ailleurs dépourvu de points-base. De plus, la courbe G_4 appartient à $|C|$ et est le lieu des points unis de I_2''.

L'homographie harmonique T_2 est donc une homologie de centre ξ_0'' et d'hyperplan ξ_8''. Comme les couples de courbes D_0 forment des courbes du système de dimension 8 qui vient d'être envisagé, le point ξ_0'' appartient à ξ_3 et l'hyperplan ξ_8'' contient l'espace ξ_5.

4. Il nous reste à déterminer les axes de l'homographie harmonique T_1.

On sait que si l'on projette une surface cubique d'un de ses points sur un plan, le contour apparent est une quartique générale (Théorème de Geiser). On peut donc prendre pour modèle projectif de la surface Φ_1 une surface cubique (générale) Ψ, le centre de projection étant un point P de cette surface.

Aux coniques du plan des x, y correspondent les sections de la surface Ψ par les cônes du second ordre de sommet P. Ces courbes appartiennent au système complet de dimension six des courbes découpées sur Ψ par les quadriques touchant cette surface en P. Appelons H ces courbes, et observons que la section H_0 de Ψ par le cône projetant $f_4 = 0$ de P est une courbe H, car c'est l'intersection de Ψ avec la quadrique polaire de P. D'autre part, la section H' de Ψ par le cône projetant $f_2 = 0$ de P appartient également à $|H|$. H' est la courbe de diramation dans la correspondance entre Φ_1 et F, elle correspond à la courbe G_2.

D'après la théorie des homographies permutables, dans S_9, le point ξ''_0, l'espace ξ_5 et le plan ξ'_2 intersection des espaces ξ_3 et ξ''_8, appartiennent certainement aux axes de T_1. Or, la courbe G_4 est une courbe C qui ne contient pas comme partie la courbe G_2, donc T_1 possède comme axes le plan ξ'_2 et l'espace ξ'_6 déterminé par le point ξ''_0 et l'espace ξ_5.

La courbe G_2 étant une courbe D, appartient à un espace linéaire à cinq dimensions, situé dans ξ'_6; il rencontre ξ_5 suivant un espace à quatre dimensions, coupant G_2 en huit points. Ces points appartiennent à la courbe G_4 et sont les points unis de l'involution I_2.

Il existe un hyperplan contenant le plan ξ'_2 et l'espace à cinq dimensions de G_2. A la section de F par cet hyperplan correspond sur Ψ la courbe H' qui intervient ici comme courbe H.

Aux sections de F par les hyperplans passant par ξ'_6 correspondent sur Ψ la courbe H' augmentée des sections de Ψ par les plans passant par P.

En résumé, *la surface* F, *de genres* $p_a = P_4 = 1$, *de* S_9, *est transformée en soi par trois homographies harmoniques deux à deux permutables* :

Une homographie possédant deux axes ponctuels ξ_3, ξ_5;

Une homologie dont le centre ξ''_0 *appartient à* ξ_3 *et dont l'hyperplan* ξ''_8 *contient* ξ_5;

Une homographie possédant comme axes un plan ξ'_2 *appartenant à* ξ_3 *et un espace* ξ'_6 *contenant le point* ξ''_0 *et l'espace* ξ_5.

L'espace ξ'_6 *coupe* F *suivant une courbe* G_2 *d'ordre huit et de genre trois, appartenant à un espace à cinq dimensions rencontrant* ξ_5 *suivant un espace à quatre dimensions. Les huit points d'intersection de* G_2 *avec ce dernier espace appartiennent à la section* G_4 *de* F *par l'hyperplan* ξ''_8.

Manuscrit reçu le 20 janvier 1956.

Lucien GODEAUX.
37, quai Orban, Liège.