SULLA STRUTTURA DI UN PUNTO DI DIRAMAZIONE DI UNA SUPERFICIE ALGEBRICA MULTIPLA DI ORDINE 31

Nota del s. c. s. LUCIEN GODEAUX

(adunanza del 16 dicembre 1954)

Sunto. — In questa nota si determina la struttura di un punto di diramazione di una superficie algebrica multipla.

Vogliamo, in questa nota, dare una applicazione di un metodo che abbiamo recentemente esposto per determinare la struttura di un punto di diramazione di una superficie multipla (1).

Il problema si presenta così: Abbiamo sopra una superficie algebrica F una involuzione ciclica I di ordine primo $p > 2$, con un numero finito di punti uniti. Sia Φ una superficie normale immagine della involuzione sulla quale i punti di diramazione sono isolati. Un punto di diramazione è multiplo per la superficie Φ. Quali sono le curve che rappresentano l'intorno del punto di diramazione sulla superficie Φ? L'insieme di queste curve, e le loro proprietà danno la struttura del punto.

Rammentiamo alcune definizioni e proprietà Un punto proprio O, oppure un punto unito appartenente ad intorno di O, sarà detto punto unito di prima specie se l'involuzione dà, nel suo intorno del primo ordine, l'identità. Sarà detto punto unito di seconda specie se, nel suo intorno del primo ordine, l'involuzione da una omografia non identica, cioè con due soli punti uniti,

Consideriamo un punto unito proprio A, di seconda specie, della involuzione ed il punto di diramazione A' corrispondente

(1) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Academie royale de Belgique, 1952, pp. 1-80); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique, Liége, 1952; Paris, Masson et Liége, Thone, 1952).

sopra Φ. In A vi sono due direzioni unite t_1, t_2. Noi consideriamo sopra F il sistema lineare $|C|$ trasformato del sistema $|\Gamma|$ delle sezioni iperpiane di Φ, il sistema $|C'|$ delle curve C passanti per A, il sistema $|C''|$ delle curve C' che toccano, in A, una direzione diversa da t_1, t_2,... Le tangenti alle curve C', C'',... coincidono con t_1, t_2.

Per studiare il comportamento delle curve C', C'',... nel punto A, associamo a questo punto due interi α, β, compresi fra 1 e p, tale che

$$\alpha\beta - 1 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

e consideriamo le congruenze

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p).$$

Le curve $C^{(i)}$ hanno in A la moltiplicità $\lambda_i + \mu_i < p$, con λ_i tangenti coincidenti con t_1 e μ_i con t_2. Abbiamo

$$\lambda_1 + \mu_1 < \lambda_2 + \mu_2 < \ldots < \lambda_i + \mu_i < \ldots < p.$$

Le curve $C^{(i)}$ hanno in comune alcune successioni di punti fissi, uniti per I, infinitamente vicini successivi al punto A. L'ultimo punto di ognuna di queste successioni è unito di prima specie per l'involuzione ed, al suo intorno, corrisponde una curva infinitesima dell'intorno del punto di diramazione A'. Sopra una curva $C^{(i)}$ vi sono, almeno per piccoli valori di i, due rami lineari di origine A. L'uno ha $\alpha - 1$ punti infinitamente vicini successivi ad A, fissi, cioè comuni a tutte le curve $C^{(i)}$, l'altro ha $\beta - 1$ punti analoghi. La somma delle moltiplicità delle curve $C^{(i)}$ nel punto A e nei punti della prima successione è eguale a p e la stessa proprietà vale per la seconda successione. Così, e mediante l'uso della teoria dei punti infinitamente vicini di Enriques si può determinare il comportamento delle curve C'', C''', ... nel punto A e la struttura del punto A'.

1. Consideriamo sopra una superficie algebrica F una involuzione ciclica I di ordine $p = 31$, con un numero finito di punti uniti. Possiamo prendere come modelle proiettivo di F una superficie normale di S_r sulla quale l'involuzione è generata da una omografia ciclica T di ordine 31. Di più, possiamo supporre che la omografia T possegga 31 assi (luogo di punti uniti) $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_{30}$; il primo solo, ξ_0, incontra F nei punti uniti di F (vedere loc. cit.).

Sia A un punto unito e supponiamo che, nel piano tangente ad F in A, piano che è unito per la omografia T, questa dia una omografia rappresentata da

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^{18} x_3 , \qquad (1)$$

essendo ε una radice primitiva di ordine 31 dell'unità, ed (1,0,0) il punto A.

Se noi poniamo $\varepsilon^{18} = \eta$, abbiamo $\eta^{19} = \varepsilon$ e l'omografia (1) può essere rappresentata da

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \eta^{19} x_2 : \eta x_3 .$$

Al punto A sono associati i numeri $\alpha = 18$, $\beta = 19$.

Diciamo C le sezioni della superficie F tagliate dagli iperpiani passanti per gli assi $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{30}$. Riferiamo proiettivamente le curve C agli iperpiani di un'iperspazio che ha la stessa dimensione di $|C|$. Alla superficie F corrisponde una superficie normale Φ, immagine della involuzione I; ad un punto di Φ corrisponde sopra F un gruppo della involuzione I. Diciamo Γ le sezioni iperpiane di Φ.

Al punto unito A di F corrisponde sopra Φ un punto di diramazione A' di cui vogliamo determinare la struttura.

Le curve C passanti per A formano un sistema lineare $|C'|$ avendo in A un punto multiplo di ordine $\lambda_1 + \mu_1$, con λ_1 tangenti coincidenti colla retta $x_3 = 0$ e μ_1 tangenti coincidenti colla retta $x_2 = 0$. I numeri λ_1, μ_1 soddisfano alle congruenze

$$\lambda + 18\mu \equiv 0, \qquad \mu + 19\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 31),$$

e danno somma minima. A queste curve C' corrispondono sopra Φ le sezioni Γ' con gli iperpiani passanti per A', oppure, se noi proiettiamo Φ da A' sopra un iperpiano, in una superficie Φ_1, le sezioni iperpiane Γ' di Φ_1.

Abbiamo dimostrato che le curve C' hanno in comune due successioni di punti, uniti per I, infinitamente vicini ad A: La prima contiene $\alpha - 1 = 17$ punti che diremo $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 17)$, l'altra $\beta - 1 = 18$ punti che diremo $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 18)$. Il punto $(\alpha, 1)$ appartiene alla retta $x_2 = 0$, il punto $(\beta, 1)$ alla retta $x_3 = 0$.

I punti $(\alpha, 17)$, $(\beta, 18)$ sono uniti di prima specie, cioè tutti i punti dell'intorno del primo ordine di uno di questi punti sono uniti per I. Invece, gli altri punti delle successioni sono uniti di seconda specie, cioè posseggono nell'intorno del primo ordine due e solamente due punti uniti.

2. Abbiamo $\lambda_1 = 3$, $\mu_1 = 5$. Come abbiamo dimostrate nella teoria generale, le curve C′ passano cinque volte per i punti $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, x), y volte per $(\alpha, x+1)$, una volta per i punti $(\alpha, x+2)$, ..., $(\alpha, 17)$ e la somma di queste moltiplicità e di quella di A è eguale a $p = 41$. Dobbiamo avere

$$8 + 5x + y + 16 - x = 31,$$

cioè

$$4x + y = 7.$$

Dunque, $x = 1$, $y = 3$.

Le curve C′ passano 5 volte per $(\alpha, 1)$, 3 volte per $(\alpha, 2)$, una volta per $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, 17)$. Queste curve debbono passare due volte per un punto unito di prima specie, infinitamente vicino ad $(\alpha, 2)$, punto che diremo $(\alpha, 2, 1)$

Le curve C′ passano tre volte per i punti $(\beta, 1)$, ..., (β, x'), y' volte per il punto $(\beta, x'+1)$, una volta per i punti $(\beta, x'+2)$, ..., $(\beta, 18)$. Dobbiamo avere

$$8 + 3x' + y' + 18 - x' = 31\ ;$$

cioè $x' = 2$, $y' = 2$. Le curve C′ passano tre volte per i punti $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, due volte per il punto $(\beta, 3)$, una volta per i punti $(\beta, 4)$, ..., $(\beta, 18)$ e dunque una volta per un punto unito di prima specie, infinitamente vicino del punto $(\beta, 3)$, che diremo $(\beta, 3, 1)$.

Sulla superficie Φ_1, all'intorno del punto $(\alpha, 17)$, corrisponde una retta σ_α, all'intorno del punto $(\alpha, 2, 1)$, una conica τ_α, all'intorno del punto $(\beta, 3, 1)$, una retta τ_β e infine, all'intorno del punto $(\beta, 18)$, una retta σ_β.

Si verifica facilmente che se n è l'ordine di Φ, il sistema $|C|$ ha il grado $31\,n$, il sistema $|C'|$ il grado effettivo $31\,(n-5)$ e la superficie Φ_1. l'ordine $n-5$.

Dunque, la superficie Φ ha nel punto di diramazione A′, la molteplicità cinque, essendo il cono tangente composto da tre piani e da un cono quadratico.

3. Diciamo C″ le curve C′ che toccano nel punto A una retta diversa delle rette $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Le curve C″ hanno in A la moltiplicità 11, con tre tangenti coincidenti con $x_3 = 0$ e le altre otto con $x_2 = 0$.

Cerchiamo come sopra le moltiplicità delle curve C″ nei punti $(\alpha, 1)$, ..., $(\beta, 1)$, ... Si trova che queste curve passano tre volte per il punto $(\alpha, 1)$, due volte per il punto $(\alpha, 2)$, una volta per i punti $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, 17)$, $(\alpha, 2,1)$, tre volte per il punto $(\beta, 1)$, una volta per i punti $(\beta, 2)$, ... $(\beta, 18)$. Inoltre, queste curve debbono passare due volte per due punti, che diciamo $(\beta, 1,1)$, $(\beta, 1,2)$; infinitamente vicini e successivi del punto $(\beta, 1)$, una volta per due punti, che diremo $(\beta, 1, 3)$, $(\beta, 1, 3, 1)$, infinitamente vicini successivi del punto $(\beta, 1, 2)$. Questi quattro punti sono uniti per l'involuzione I, i tre primi di seconda specie, l'ultimo di prima specie.

Chiamiamo Γ'' le curve che corrispondono sopra Φ alle curve C'' e Φ_2 una superficie di cui le curve Γ'' sono le sezioni iperpiane (Proiezione di Φ_1).

Sulla superficie Φ_2, all'intorno del punto $(\alpha, 17)$ corrisponde una retta σ_α, all'intorno del punto $(\alpha, 2, 1)$, una retta τ_α, all'intorno del punto $(\beta, 1, 3, 1)$, una retta ϱ ed all'intorno del punto $(\beta, 19)$, una retta τ_β. Si vede facilmente che il grado effettivo del sistema $|C''|$ è $31\,(n-6)$, dunque Φ_2 è di ordine $n-6$ e la retta ϱ è eccezionale.

La superficie Φ_2 è la proiezione di Φ_1 da un punto che deve appartenere alla conica τ_α ed alla retta τ_β. Dunque, sopra Φ_1, τ_α e τ_β si incontrano in un punto A'_1, semplice per la superficie.

4. Chiamiamo C''' le curve C'' che toccano nel punto A una retta diversa delle rette $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Queste curve hanno in A la molteplicità 13, con 12 tangenti coincidenti con $x_3 = 0$ ed una con $x_2 = 0$.

Le curve C''' passano necessariamente una volta per i punti $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 18)$. Non possono più passare per il punto $(\alpha, 2, 1)$. Si vede che passano due volte per $(\alpha, 1)$ ed una volta per $(\alpha, 2)$ ..., $(\alpha, 17)$. Inoltre, passano semplicemente per dieci punti, infinitamente vicini successivi di $(\alpha, 1)$, punti che diremo $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, ..., $(\alpha, 1, 10)$. Questi punti sono uniti per l'involuzione I, l'ultimo solo di prima specie.

Se Γ''' sono le curve che corrispondono sopra Φ alle curve C''' e Φ_3 una superfice di cui le sezioni iperpiane sono le curve Γ''', vediamo che all'intorno del punto $(\alpha, 17)$ corrisponde sopra Φ_3 una retta σ_α, all'intorno del punto $(\alpha, 1, 10)$, una retta ϱ', all'intorno di $(\beta, 18)$, una retta σ_β.

Il sistema $|C'''|$ è di grado effettivo 31 (n-7), dunque la superficie Φ_3 è di ordine n-7 e la retta ϱ' è eccezionale.

Osserviamo che sulla superficie Φ_2, la retta ϱ incontra la retta τ_α in un punto A'_2, che non è altro che il centro di proiezione di Φ_2 sopra Φ_3 ed è semplice per la superficie. Sempre sulla Φ_2, all'intorno del punto $(\beta, 3, 1)$ corrisponde un punto (singolare per la superficie) della retta ϱ. A questo punto corrisponde, sopra Φ_3, un punto singolare per la superficie, sulla retta ϱ'.

Anche all'intorno del punto $(\alpha, 2, 1)$, corrisponde sopra Φ_3 un punto della retta ϱ', singolare per la superficie.

5. Indichiamo con $C^{(4)}$ le curve C''' che toccano nel punto A una retta diversa delle rette $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Le curve $C^{(4)}$ hanno in A la molteplicità 14, con 13 tangenti coincidenti colla retta $x_2 = 0$ ed una colla retta $x_3 = 0$.

Le curve $C^{(4)}$ passano una volta per i punti $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 17)$. Non possono più passare passare per il punto $(\beta, 18)$. Diciamo $\Gamma^{(4)}$ le curve che corrispondono sopra Φ alle curve $C^{(4)}$ e Φ_4 una superficie che ha per sezioni iperpiane le curve $\Gamma^{(4)}$. La superficie Φ_4 è la proiezione di Φ_3 da un punto A'_3 di questa superficie.

Le curve $C^{(4)}$ non contengono più il punto $(\alpha, 1, 10)$, dunque A'_3 appartiene a ϱ'. Le stesse curve non contengono più il punto $(\beta, 18)$, dunque il punto A'_3 appartiene alla retta σ_β. Noi vediamo che il punto A'_3 rappresenta l'intorno del punto $(\beta, 3, 1)$, cioè la retta τ_β.

Ma allora, le curve $C^{(4)}$ debbono passare per il punto $(\beta, 3, 1)$. Troviamo precisamente che le curve $C^{(4)}$ passano otto volte per il punto $(\beta, 1)$, sei volte per il punto $(\beta, 2)$, tre volte per i punti $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$, due volte per i punti $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, una volta per i punti $(\beta, 1, 3)$, $(\beta, 1, 3, 1)$.

Sulla superficie Φ_4, all'intorno del punto $(\alpha, 17)$ corrisponde la retta σ_α, all'intorno del punto $(\beta, 1, 3, 1)$ la retta eccezionale ϱ, all'intorno del punto $(\beta, 3, 1)$, una cubica gobba τ_β. All'intorno del punto $(\beta, 18)$ corrisponde un punto isolato di Φ_4, singolsre per la superficie.

6. Consideriamo infine le curve $C^{(5)}$, cioè le curve $C^{(4)}$ che toccano nel punto A una retta diversa delle rette $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Diciamo $\Gamma^{(5)}$ le curve che corrispondono sopra Φ alle curve

$C^{(5)}$ e Φ_5 una superficie di cui le sezioni iperpiane sono le curve $\Gamma^{(5)}$.

Le curve $C^{(5)}$ hanno la moltiplicità 16 in A, dieci tangenti coincidenti con $x_3 = 0$, e sei colla retta $x_2 = 0$. Esse passano sei volte per i punti $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, tre volte per i punti $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$. Non possono più passare per i punti $(\alpha, 17)$, $(\beta, 1, 3, 1)$, dunque la superficie Φ_5 è la proiezione di Φ_4 da un punto A'_4 comuue alle rette σ_α e ϱ. Questo punto rappresenta τ_α e le curve $C^{(5)}$ debbono dunque passare per il punto $(\alpha, 1)$ e cinque volte per i punti $(\alpha, 1)$ e cinque volte per i punti $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 2, 1)$.

Sulla suqerficie Φ_5, abbiamo una quintica razionale τ_α ed una cubica sghemba τ_β.

7. Ritorniamo alla superficie Φ_1. Abbiamo sopra questa superficie una retta σ_α, una conica τ_α che incontra σ_α in un punto, una retta τ_β che incontra τ_α in un punto ed una retta σ_β che incontra τ_β in un punto. Due di queste curve non si incontrano fuori di questi tre punti, che sono semplici per la superficie. Possiamo dunque scrivere

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \tau_\alpha + \tau_\alpha + \tau_\beta + \sigma_\beta \,.$$

Ne deduciamo che le curve σ_α, τ_α, τ_β, τ_β hanno rispettivamente i gradi virtuali -2, -4, -3, -2.

Sulla superficie Φ_1, le Γ'' sono tagliati dagli iperpiani per il punto A'_1, comune alle curve τ_α, τ_β, le curve Γ''' dagli iperpiani che toccano la conica τ_α in A'_1; le curve $\Gamma^{(4)}$ dagli iperpiani che contengono la retta τ_β. Abbiamo dunque

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(4)} + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + 2\,\tau_\beta + \sigma_\beta \,.$$

Da questa relazione, si deduce che le curve $\Gamma^{(4)}$ incontrano la curva τ_α in un punto e la curva τ_β in quattro punti. Osserviamo che le curve $\Gamma^{(4)}$ sono curve Γ''' parlicolari e dunque debbono incontrare τ_α in due punti coincidenti con A'_1. Ne concludiamo che le curve $\Gamma^{(4)}$ passano per A'_1, non incontrano più τ_α ed incontrano τ_β in tre punti variabili. Così si spiega che, sulla superficie Φ_4, τ_β è una cubica gobba e che esiste la retta eccezionale ϱ, che rappresenta A'_1.

Per le curve $\Gamma^{(5)}$, abbiamo

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(5)} + \sigma_\alpha + 2\,\tau_\alpha + 2\,\tau_\beta + \sigma_\beta$$

e queste curve incontrano τ_α in cinque punti e τ_β in tre punti·

Sulla superficie Φ_1, le curve $\Gamma^{(5)}$ sono tagliate dagli iperpiani che contengono il piano della conica τ_α e la retta τ_β.

Non è necessario considerare le curve $C^{(6)}, \ldots$, perchè la struttura del punto A′ è data dalle curve σ_α, τ_α, τ_β, σ_β.

Il punto di diramazione A′ è mnltiplo di ordine cinque per la superficie Φ. Il cono tangente è composto da un piano (σ_α), da uno cono quadrico (τ_α) che incontra il piano (σ_α) secondo una retta, da un piano (τ_β) che incontra (τ_α) secondo una retta e da un piano (σ_β) che incontra (τ_β) secondo una retta. Fuori di queste tre rette, i piani ed il cono quadrico precedenti non hanno in comune che il vertice A′.