Sur la Génération projective des courbes algébriques gauches

par Lucien Godeaux, Liège.

En géométrie projective, on définit en général une courbe algébrique gauche de la manière suivante: On considère deux réseaux homographiques de surfaces algébriques; la courbe est le lieu des points tels que les faisceaux de surfaces des deux réseaux passant par ce point se correspondent dans l'homographie. Une étude complète de cette génération doit évidemment comporter la détermination des dégénérescences de la courbe obtenue. Il est remarquable que l'on peut trouver, dans certaines dégénérescences, des surfaces. Nous allons dans cette note, considérer le cas le plus simple, celui d'une cubique gauche, et montrer que l'on est conduit à considérer, comme dégénérescence de cette courbe l'ensemble d'une droite et d'un plan.

1. Une cubique gauche irréductible K est le lieu des points communs aux rayons homologues de deux gerbes homographiques de plans de sommets A, B, *n'ayant aucun élément commun uni*. Les dégénérescences s'obtiendront en laissant tomber cette dernière condition.

Un élément uni commun aux deux gerbes homographiques de sommets A, B est nécessairement un plan passant par A, B. Trois cas peuvent se présenter:

a) Il existe un seul plan uni α. La cubique K dégénère en une conique passant par A, B, située dans le plan α et en une droite s'appuyant sur cette conique.

b) Il existe deux plans unis α, β. La cubique gauche K dégénère en trois droites: la droite AB, et deux droites situées l'une dans α, l'autre dans β.

c) Il existe une infinité de plans unis. Les deux gerbes A, B sont alors perspectives et les rayons homologues se rencontrent suivant les points d'un plan α. La cubique gauche est formée de ce plan α et de la droite AB.

2. Le troisième cas peut sembler introduit artificiellement et on pourrait penser à l'écarter en disant qu'une courbe ne peut comprendre une double infinité de points. Cependant, comme nous allons le voir, il peut se présenter tout naturellement dans certaines questions.

Représentons par a_x, b_x, . . . des formes linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4 et considérons les équations

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_2 a_x & \alpha_1 b'_x + \alpha_2 b_x & \alpha_1 c_x + \alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x \\ \alpha_1 a''_x + \alpha_3 a_x & \alpha_1 b''_x + \alpha_3 b_x & \alpha_1 c'_x + \alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x \end{matrix} \right\| = 0. \quad (1)$$

Si l'on interprète les x comme coordonnées des points de l'espace, les équations (1) représentent, lorsque les α varient, une congruence de cubiques gauches. Proposons-nous de déterminer l'ordre de cette congruence, c'est-à-dire le nombre des cubiques passant par un point donné.

Dans (1), fixons les x et cherchons à déterminer le nombre de solutions α (Pour simplifier, nous écrirons a au lieu de a_x, . . .).

Les deux premières colonnes de (1) donnent

$$\alpha_1 \begin{vmatrix} \alpha_1 & a & b \\ -\alpha_2 & a' & b' \\ -\alpha_3 & a'' & b'' \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

La première et la dernière colonnes donnent

$$(\alpha_1 a' + \alpha_2 a)(\alpha_1 c' + \alpha_2 d' + \alpha_3 f') \\ - (\alpha_1 a'' + \alpha_3 a)(\alpha_1 c + \alpha_2 d + \alpha_3 f) = 0. \tag{3}$$

Interprétons les α comme coordonnées d'un plan. Les solutions cherchées correspondent aux points communs aux courbes (1) et (2), sauf la solution

$$\frac{\alpha_1}{-a} = \frac{\alpha_2}{a'} = \frac{\alpha_3}{a''}, \tag{4}$$

qui annule les termes de la première colonne mais non le déterminant formé par les deux dernières colonnes.

La droite représentée par le second facteur de (2) égalé à zéro rencontre la conique (2), en dehors du point (4), en un second point qui donne une cubique en général irréductible.

Restent les points communs à la conique (3) et à la droite $\alpha_1 = 0$. Pour $\alpha_1 = 0$, la matrice (1) se réduit à

$$\begin{Vmatrix} \alpha_2 a & \alpha_2 b & \alpha_2 d + \alpha_3 f \\ \alpha_3 a & \alpha_3 b & \alpha_2 d' + \alpha_3 f' \end{Vmatrix} = 0,$$

qui représente l'ensemble de la droite

$$a_x = b_x = 0$$

et du plan

$$\alpha_2 (\alpha_2 d'_x + \alpha_3 f'_x) - \alpha_3 (\alpha_2 d_x + \alpha_3 f_x) = 0.$$

On peut donc dire que la matrice (1) représente une congruence d'ordre un de cubiques gauches irréductibles.

3. Quelle est la condition pour que la matrice

$$\begin{Vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a'_x & b'_x & c'_x \end{Vmatrix} = 0, \tag{5}$$

où

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4, \ldots,$$

représente une cubique gauche dégénérée en une droite et un plan ? Cela revient à déterminer les conditions pour que les deux gerbes

$$\lambda_1 a_x + \lambda_2 b_x + \lambda_3 c_x = 0,$$
$$\lambda_1 a'_x + \lambda_2 b'_x + \lambda_3 c'_x = 0$$

soient perspectives.

Les paramètres λ fixant les plans de la première gerbe passant par le sommet de la seconde sont donnés par

$$\lambda_1 \Delta'_1 + \lambda_2 \Delta'_2 + \lambda_3 \Delta'_3 = 0, \tag{6}$$

où Δ'_1 est le déterminant dont la première ligne est

$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a'_1 & b'_1 & c'_1 \end{vmatrix}, \ldots .$$

De même, les paramètres λ définissant les plans de la seconde gerbe passant par le sommet de la première sont donnés par

$$\lambda_1 \Delta_1 + \lambda_2 \Delta_2 + \lambda_3 \Delta_3 = 0, \tag{7}$$

où

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a'_1 & a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}, \ldots .$$

Les équations (6) et (7) devant avoir les mêmes solutions, la condition cherchée est

$$\frac{\Delta'_1}{\Delta_1} = \frac{\Delta'_2}{\Delta_2} = \frac{\Delta'_3}{\Delta_3}.$$