SUR UNE CORRESPONDANCE ENTRE SURFACES AVEC CONSERVATION DES ASYMPTOTIQUES

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

En chaque point d'une surface (x), nous avons attaché une suite de quadriques Φ, $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$ dont la première est la quadrique de Lie. Deux quadriques consécutives Φ_n, Φ_{n+1} de la suite se touchent en quatre points qui sont caractéristiques pour chacune de ces quadriques. L'enveloppe de la quadrique Φ_n se compose donc de huit nappes : quatre qui font partie de l'enveloppe de la quadrique Φ_{n-1} et quatre qui font partie de l'enveloppe de la quadrique Φ_{n+1} (1). Nous nous proposons, dans cette Note, d'indiquer une condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques des quatre nappes communes aux enveloppes des quadriques Φ_n, Φ_{n+1} correspondent aux asymptotiques de la surface (x). Nous avons déjà résolu ce problème dans le cas $n = 0$: Φ_n est alors la quadrique de Lie Φ (2), mais la méthode que nous avons suivie ne peut s'étendre aisément, car elle conduirait à des calculs extrêmement compliqués.

Nous montrons également que si $(\bar{x})$ est une des nappes de l'enveloppe considérée et $\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}_1, \ldots, \bar{\Phi}_n, \ldots$ la suite de quadriques associée à un point de cette surface, la surface (x) fait partie de l'enveloppe des quadriques $\bar{\Phi}_n$, $\bar{\Phi}_{n+1}$.

1. Soit (x) une surface non réglée, rapportée à ses asymptotiques u, v. Les coordonnées normales de Wilczynski d'un point

---

(1) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1927, p. 812-826; 1928, p. 31-41). *Voir* aussi notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (*Act. Scient.*, n° 138, Paris, Hermann, 1934).

(2) *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1929, p. 37-53, 702-740). *Voir* aussi notre exposé cité plus haut.

de cette surface satisfont au système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable ([3]),

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$
$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

où a, b, c_1, c_2 sont des fonctions différentiables de u, v.

Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de S_5, représentant les tangentes asymptotiques xx^{10}, xx^{01} de la surface (x). On a

$$U^{10} + 2bV = 0, \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Les points U, V sont donc consécutifs dans une suite de Laplace L. Nous désignerons par U_1, $U_2, \ldots$ les transformés de Laplace successifs de U dans le sens des v, par V_1, $V_2, \ldots$ ceux de V dans le sens des u.

La suite L est autopolaire par rapport à Q. Le point U_n a pour hyperplan polaire $V_{n-2}V_{n-1}V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et le point V_n, l'hyperplan $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Les plans $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ et $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ sont conjugués par rapport à Q et ces plans coupent Q suivant deux coniques dont les points représentent les génératrices de deux demi-quadriques ayant même support Φ_n.

Considérons les quadriques Φ_n, Φ_{n+1}. Les points où les droites $U_{n+1}U_{n+2}$ et $V_{n+1}V_{n+2}$ coupent Q représentent quatre droites communes à Φ_n, Φ_{n+1}, formant un quadrilatère gauche dont les sommets sont points de contact de ces deux quadriques. Ces quatre points sont également caractéristiques pour les deux quadriques et nous allons rechercher la condition nécessaire et suffisante pour que les asymptotiques des quatre nappes de l'enveloppe commune à Φ_n, Φ_{n+1}, soient les courbes u, v.

Nous supposerons la suite L illimitée dans les deux sens et les quadriques Φ_n, Φ_{n+1} en général non dégénérées.

2. Désignons par C_1, C_2 les points de rencontre de la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ avec Q et par D_1, D_2 ceux de la droite $U_{n+1}U_{n+2}$.

([3]) Nous écrivons

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}.$$

Lorsque v varie, la droite $V_{n+1}V_{n+2}$ engendre une développable; le plan tangent à cette surface le long de cette droite est le plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et par conséquent les droites $C_1C_0^{01}$, $C_2C_2^{01}$ sont contenues dans ce plan. Ces droites se rencontrent en un point A.

De même, les droites $D_1D_1^{10}$, $D_2D_2^{10}$ se coupent en un point B du plan $U_nU_{n+1}U_{n+2}$.

Les droites $C_1C_1^{10}$, $C_2C_2^{10}$ se coupent en un point A′ du plan $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$ et les droites $D_1D_1^{01}D_2D_2^{01}$ en un point B′ du plan $U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}$.

Les droites AC_1, AC_2 touchent Q en C_1, C_2, donc le point A a pour hyperplan polaire $U_nU_{n+1}U_{n+2}V_{n+1}V_{n+2}$. De même, le point B a pour hyperplan polaire $V_nV_{n+1}V_{n+2}U_{n+1}U_{n+2}$. Il en résulte que la droite AB est la conjuguée par rapport à Q de l'espace à trois dimensions $U_{n+1}U_{n+2}V_{n+1}V_{n+2}$.

Les hyperplans polaires des points A′, B′ par rapport à Q sont respectivement $U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}V_{n+1}V_{n+2}$ et $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}U_{n+1}U_{n+2}$. Par conséquent l'espace à trois dimensions conjugué de la droite A′B′ également l'espace $U_{n+1}U_{n+2}V_{n+1}V_{n+2}$. Les droites AB et A′B′ coïncident donc.

Observons que les points A, B d'une part, les points A′, B′ d'autre part, sont conjugués par rapport à Q.

Désignons par c_1, c_2, d_1, d_2 les droites représentées sur Q par les points C_1, C_2, D_1, D_2. Ces droites forment un quadrilatère commun aux quadriques Φ_n, Φ_{n+1}; elles appartiennent à une congruence linéaire dont la seconde image est la droite AB. Les points de rencontre de AB avec Q représentent donc les diagonales du quadrilatère gauche formé par les droites c_1, c_2, d_1, d_2.

3. Supposons que le point B′ coïncide avec le point A. Alors, les points B, A′ appartenant à une droite passant par A et étant conjugués de A par rapport à Q, coïncident également.

Rappelons que l'on a

$$V_m^{10} = V_{m+1} + V_m(\log a k_1 \ldots k_m)^{10},$$
$$V_m^{01} = k_m V_{m-1}.$$

où k_m est défini par la relation

$$k_m = -(\log a\, k_1 \ldots k_{m-1})^{11} + k_{m-1},$$

ou encore par

$$k_m = -(\log a^m k_1^{m-1} \dots k_{m-2}^2 k_{m-1})^{11} + 4ab.$$

Le point A appartenant au plan $V_n V_{n+1} V_{n+2}$, on peut écrire

$$A = \lambda_0 V_n + \lambda_1 V_{n+1} + \lambda_2 V_{n+2},$$

où les λ sont des fonctions de u, v. On en déduit

$$A^{10} = \lambda_0^{10} V_n + \lambda_0 [V_{n+1} + V_n (\log a k_1 \dots k_n)^{10}] + \dots$$
$$+ \lambda_2 [V_{n+3} + V_{n+2} (\log a k_1 \dots k_{n+2})^{10}].$$

les termes non écrits étant des termes en V_{n+1}, V_{n+2}.

Par conséquent, le point

$$A^{10} - A (\log a k_1 \dots k_n \lambda_0)^{10}$$

s'exprime linéairement en fonction des points V_{n+1}, V_{n+2}, V_{n+3} et appartient donc au plan déterminé par ces trois points. En d'autres termes, la droite AA^{10} rencontre ce plan en un point.

Le point $B' \equiv A$ appartenant au plan $U_{n+1} U_{n+2} U_{n+3}$, on peut écrire

$$A = \mu_1 U_{n+1} + \mu_2 U_{n+2} + \mu_3 U_{n+3}.$$

Rappelons que l'on a

$$U_m^{01} = U_{m+1} + U_m (\log b h_1 \dots h_m)^{01},$$
$$U_m^{10} = h_m U_{m-1},$$

où

$$h_m = -(\log b h_1 \dots h_m)^{11} + h_{m-1}.$$

On a donc

$$A^{10} = \mu_1^{10} U_{n+1} + \mu_1 h_{n+1} U_n + \dots + \mu_3^{10} U_{n+3},$$

les termes non écrits contenant U_{n+1}, U_{n+2}. On en conclut que le point

$$A^{10} - A (\log \mu_3)^{10}$$

appartient au plan $U_n U_{n+1} U_{n+2}$, ou encore que la droite AA^{10} rencontre ce plan en un point.

Les plans $V_{n+1} V_{n+2} V_{n+3}$ et $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ ont en commun le point $B \equiv A'$, donc la droite AA^{10} passe par le point B (1).

---

(1) On démontre facilement que, si les plans $V_{n+1} V_{n+2} V_{n+3}$ et $U_n U_{n+1} U_{n+2}$

On démontre de la même manière que la droite BB^{01} passe par le point A et par conséquent, les points A, B se correspondent dans des transformations de Laplace. Ces points déterminent une suite de Laplace doublement inscrite dans les plans de la suite L. D'une manière précise, si nous désignons par $A_1, A_2, \ldots$ les transformés successifs de Laplace de A dans le sens des v et par $B_1, B_2, \ldots$ ceux de B dans le sens des u :

Le point A_1 appartient aux plans $V_{n-1}V_nV_{n+1}$ et $U_{n+2}U_{n+3}U_{n+4}$.

Le point B_1 appartient aux plans $U_{n-1}U_nU_{n+1}$ et $V_{n+2}V_{n+3}V_{n+4}$, et ainsi de suite ([2]).

4. Appelons C_{11} le point de rencontre de la droite $C_1A = C_1C_1^{01}$ avec la droite V_nV_{n+1}. Lorsque u varie, la droite V_nV_{n+1} engendre une développable que le plan $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ touche le long de cette droite, par conséquent la droite $C_{11}C_1^{10}$ se trouve dans ce plan et rencontre la droite $V_{n+1}V_{n+2}$.

Nous pouvons écrire

$$C_{12} = \lambda A + \mu C_1,$$

d'où l'on déduit

$$C_{11}^{10} = \lambda^{10} A + \lambda A^{10} + \mu^{10} C_1 + \mu C_1^{10}.$$

Le point A^{10} se trouve sur la droite AB, le point C_1^{10} sur la droite C_1B, donc le point C_{12}^{10} appartient au plan A B C_1. Ce plan coupe $V_{n+1}V_{n+2}$ au point C_1, donc la droite $C_{11}C_{11}^{10}$ passe par C_1. Il en résulte que les points C_1, C_{11} sont transformés de Laplace l'un de l'autre et que le point C_1 décrit un réseau conjugué, les paramètres étant u, v. Il en est de même des points C_2, D_1, D_2.

D'après un théorème classique de Darboux, les droites c_1, c_2, d_1, d_2 engendrent des congruences W et les asymptotiques des surfaces focales sont les courbes u. v.

Désignons par x_{ik} le point de rencontre des droites c_i, d_k. Les

---

avaient en commun une droite, celle-ci appartiendrait à Q et les quadriques Φ_n, Φ_{n+1} seraient dégénérées, contrairement à l'hypothèse.

([2]) Si les plans $V_nV_{n+1}V_{n+2}$ et $U_{n+1}U_{n+2}U_{n+3}$ ont en commun un point M, leurs conjugués par rapport à Q, $U_nU_{n+1}U_{n+2}$ et $V_{n+1}V_{n+2}V_{n+3}$ ont égalament en commun un point N. Le raisonnement qui vient d'être fait prouve que les points M, N sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

asymptotiques des surfaces (x_{11}), (x_{12}), (x_{21}), (x_{22}) sont donc les courbes u, v et chacune de ces surfaces correspond donc à la surface (x) avec conservation des asymptotiques.

5. Supposons qu'inversement, les surfaces (x_{11}), (x_{12}), (x_{21}), (x_{22}) aient pour asymptotiques les courbes u, v. Alors la droite c_1 engendre une congruence qui a pour surfaces focales (x_{11}), (x_{12}) et cette congruence est une congruence W. Par conséquent, d'après le théorème de Darboux, sur la surface (C_1) engendrée par le point C_1, les courbes u, v forment un réseau conjugué. On arrive à la même conclusion pour les surfaces engendrées par les points C_2, D_1, D_2.

Le point C_1 engendre un réseau conjugué à la congruence $(V_{n+1}V_{n+2})$ et par conséquent détermine une suite de Laplace inscrite dans la suite L. Il en est de même des points C_2, D_1, D_2.

Le point A étant l'intersection des droites $C_1 C_1^{01}$ $C_2 C_2^{01}$, le point A^{10} doit être l'intersection des droites $C_1 C_1^{10}$, $C_2 C_2^{10}$, c'est-à-dire coïncider avec le point A', et inversement.

De même, les points B et B' sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Si le point B' ne coïncidait pas avec A (et par suite A' avec B), la congruence engendrée par la droite AB aurait quatre surfaces focales, ce qui est absurde. Donc B' coïncide avec A et A' avec B.

La condition nécessaire et suffisante pour que les nappes communes aux enveloppes des quadriques Φ_n, Φ_{n+1} aient pour asymptotiques les courbes u, v, est que les tangentes aux courbes v (ou aux courbes u) aux points d'intersection avec l'hyperquadrique Q avec les droites $U_{n+1}U_{n+2}$, $V_{n+1}V_{n+2}$, soient concourantes.

6. Nous allons, pour simplifier, modifier un peu nos notations. Nous désignerons par C un des points de rencontre de $V_{n+1}V_{n+2}$ avec Q et par D un des points de rencontre de $U_{n+1}U_{n+2}$ avec Q. Nous désignerons par $\bar{x}$ le point de rencontre des droites c, d représentées par ces points. La droite CD appartient à Q et représente le faisceau des tangentes à la surface $(\bar{x})$ au point $\bar{x}$. Les tangentes aux asymptotiques $\bar{x}\bar{x}^{10}$, $\bar{x}\bar{x}^{01}$ à la surface $(\bar{x})$ ont pour images sur Q deux points $\bar{U}$, $\bar{V}$ de la droite CD.

Les points $\overline{U}$, $\overline{V}$ sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$(1) \qquad \ldots, \ \overline{U}_m, \ \ldots, \ \overline{U}_1, \ \overline{U}, \ \overline{V}, \ \overline{V}_1, \ \ldots, \ \overline{V}_m, \ \ldots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points C, D font partie de suites de Laplace inscrites dans la suite L. Nous désignerons ces suites par

$$(2) \qquad \ldots, \ C_2, \ C_1, \ C, \ C_{-1}, \ C_{-2}, \ldots,$$
$$(3) \qquad \ldots, \ D_2, \ D_1, \ D, \ D_{-1}, \ D_{-2}, \ldots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u,

Observons que les points C_{n+2}, $D_{-(n+2)}$ appartiennent à la droite UV.

Les suites (2) et (3) sont inscrites dans la suite (1). Il en résulte que, la droite $\overline{U}\overline{V}$ coïncidant avec la droite CD, la droite $\overline{U}\overline{V}_1$ coïncide avec la droite $C_1 D_1, \ldots$ la droite $\overline{U}_n \overline{U}_{n+1}$ avec la droite $C_{n+1} D_{n+1}$, la droite $\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+2}$ avec la droite $C_{n+2} D_{n+2} \ldots$. La droite $\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+2}$ s'appuie donc en C_{n+2} sur la droite UV.

La droite $\overline{V}\overline{V}_1$ coïncide avec la droite $C_{-1} D_{-1}$, la droite $\overline{V}_1\overline{V}_2$ avec la droite $C_{-2} D_{-2} \ldots$, la droite $C_{-(n+1)} D_{-(n+1)}$ avec la droite $\overline{V}_n \overline{V}_{n+1}$, la droite $C_{-(n+2)} D_{-(n+2)}$, avec la droite $\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}, \ldots$ Il en résulte que la droite $\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}$ rencontre la droite UV au point $D_{-(n+2)}$.

Soit $\overline{\Phi}$, $\overline{\Phi}_1$, $\overline{\Phi}_2, \ldots$ la suite de quadriques associée au point $\overline{x}$ de la surface $(\overline{x})$. Les demi-quadriques de support $\overline{\Phi}_n$ sont représentées par les sections de Q par les plans $\overline{U}_n\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+2}$ et $\overline{V}_n\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}$ et les demi-quadriques de support $\overline{\Phi}_{n+1}$ par les sections de Q par les plans $\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+2}\overline{U}_{n+3}$ et $\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}\overline{V}_{n+3}$. Les points C_{n+2}, $D_{-(n+2)}$ représentent deux droites appartenant à ces deux quadriques et se coupent au point x; la surface (x) est donc une des nappes communes aux enveloppes des quadriques $\overline{\Phi}_n, \overline{\Phi}_{n+1}$.

Si les asymptotiques des nappes communes aux enveloppes des quadriques Φ_n, Φ_{n+1} correspondent aux asymptotiques de la surface (x) et si l'on désigne par $\overline{\Phi}$, $\overline{\Phi}_1, \ldots$ la suite de quadriques associée à un point d'une de ces nappes, la surface (x) fait partie de l'enveloppe des quadriques Φ_n, $\overline{\Phi}_{n+1}$.

7. La droite $\overline{U}_{n+1}\overline{U}_{n+2}$ coupe Q au point C_{n+2} et en un autre que nous désignerons par C'_{n+2}. La droite $\overline{V}_{n+1}\overline{V}_{n+2}$ coupe Q en $D_{-(n+2)}$ et en un second point qui sera désigné par $D'_{(n+2)}$.

Les tangentes aux courbes v aux points C_{n+2}, C'_{n+2} se coupent en un point $\overline{A}$ et les tangentes aux courbes u en $D_{-(n+2)}$, $D'_{(-n+2)}$ se coupent en un point $\overline{B}$. Les points $\overline{A}$, $\overline{B}$ sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Les tangentes aux courbes v en $D_{-(n+2)}$, $D'_{(n+2)}$ passent par $\overline{A}$ et les tangentes aux courbes u en C_{n+2}, C'_{n+2} passent par $\overline{B}$.

La tangente $C_{n+2}C_{n+3}$ à la courbe v en C_{n+2} appartient au plan VUU_1, puisque la suite (2) est inscrite dans L. Le point $\overline{A}$ appartient donc à ce plan. De même, le point $\overline{B}$ appartient au plan UVV_1.

Il existe quatre nappes analogues à la surface $(\overline{x})$, donc il existe quatre couples de points analogues au couple $\overline{A}\overline{B}$.

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LXXVIII, juillet-août 1954.)

145677-54 Paris.. — Imprimerie Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins, 55.