Sopra alcune superficie algebriche dell'iperspazio

Nota di LUCIEN GODEAUX (Liegi)

Come è noto, G. HUMBERT ha considerato la superficie che rappresenta le coppie di punti di una curva di genere tre in modo che ogni punto della superficie sia l'immagine di due coppie di punti costituenti sulla curva un gruppo canonico (1). Abbiamo dimostrato che questa superficie ammette come modello proiettivo nello S_6 l'intersezione del cono proiettante da un punto una superficie di Veronese e di una ipersuperficie d' ordine tre non contenente il vertice del cono (2). L'ipersuperficie tocca il cono in 28 punti. Abbiamo chiamato superficie di Humbert generalizzata l'intersezione del cono e dell'ipersuperficie senza contatti. Abbiamo allora considerato, sopra quest' ultima superficie, alcune involuzioni cicliche (3).

Lo scopo di questa nota è di costruire superfici algebriche di cui la superficie di Humbert è un caso particolare.

1. - Consideriamo uno spazio lineare S_N ad

$$N = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(1) G. HUMBERT - *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois*. Journal de Liouville, 1896.

(2) L. GODEAUX - *Sur une involution rationnelle douée de trois point de coïncidence appartenant à une surface algébrique de genre trois*. Bull. Acad. roy. de Belgique, 1921.

(3) L. GODEAUX - *Sur quelques involutions appartenant à la surface de Humbert généralisée*. Bull. Acad roy de Belgique, 1936.

dimensioni ed un suo iperpiano. In quest'ultimo, diciamo Φ la superficie d'ordine n^2 le cui sezioni iperpiane rappresentano le curve d'ordine n di un piano. Proiettando Φ da un punto O scelto fuori dell'iperpiano, otteniamo un cono V_3.

Sia V_{N-1}^m una ipersuperficie d'ordine m di S_N, non contenente il punto O. Questa sega il cono V_3 secondo una superficie F d'ordine mn^2. Vogliamo determinare il sistema canonico di F.

Sulla Φ abbiamo una rete omaloidica di curve razionali d'ordine n; il cono V_3 possiede quindi una rete di coni γ d'ordine n aventi a due a due una retta in comune. Questi coni segano su di F le curve C di una rete $|C|$ di grado m.

Le sezioni iperpiane della superficie F appartengono al sistema $|nC|$. Infatti, un iperpiano passante pel punto O sega su di Φ una curva che possiamo supporre formata di n curve razionali d'ordine n. Lo stesso iperpiano sega quindi V_3 secondo n coni γ e la superficie F secondo n curve C.

2. - Possiamo rappresentare un cono γ punto per punto sopra un piano σ facendo corrispondere alle sue sezioni iperpiane le curve φ d'ordine $n+1$ del piano σ, che hanno un punto A multiplo d'ordine n ed $n+1$ punti semplici $A_0, A_1, \cdots, A_n$ appartenenti ad una retta p.

Alla curva C tracciata sul cono γ corrisponde nel piano σ una curva Γ d'ordine $(n+1)m$ col punto mn-*plo* A e coi punti m-*pli* $A_0, A_1, \cdots, A_n$. La curva Γ è di genere $\frac{1}{2} m(nm-n-2)+1$. Le sue curve aggiunte sono d'ordine $(n+1)m-3$, passano $nm-1$ volte per A ed $m-1$ volte per $A_0, A_1, \cdots, A_n$. Osserviamo adesso che le rette $AA_0, AA_1, \cdots, AA_n$ si staccano da queste curve aggiunte.

Quindi, l'aggiunto puro di Γ consta di curve d'ordine

$$(n+1)(m-1)-3=(n+1)(m-2)+n-2,$$

costrette a passare

$$nm - 1 - (n + 1) = n(m - 2) + n - 2$$

volte pel punto A ed $m - 2$ volte pei punti $A_0, A_1, \cdot \cdot \cdot, A_n$.

Se noi diciamo g le rette uscenti dal punto A, risulta che l'aggiunto puro della curva Γ è

$$|\Gamma'| = |(m - 2)\varphi + (n - 2)g|.$$

Siccome alle rette g corrispondono le generatrici rettilinee del cono γ, abbiamo sulla F

$$|C'| = |[(m - 2)n + (n - 2)]C|,$$

cioè

$$|C'| = |(mn - n - 2)C|.$$

3. - Il sistema canonico della superficie F è

$$|K| = |C' - C| = |(mn - n - 3)C|.$$

Osserviamo che $|C'|$ sega sopra una curva C la serie canonica completa; F è quindi regolare. Non sembra pure possibile dare una formula generale per il genere geometrico di F.

Il genere lineare della superficie è dato da

$$p^{(1)} - 1 = (mn - n - 3)^2 m.$$

Nel caso $n = 2$, $m = 3$, otteniamo la superficie di Humbert generalizzata, di generi $p_g = p_a = 3$, $p^{(1)} = 4$; le curve C sono allora di genere 4 e costituiscono il sistema canonico di F.

Nel caso $n = 3$, $m = 2$, otteniamo una superficie di genere uno a curva canonica d'ordine zero. È noto che questa superficie è una trasformata del piano doppio con sestica di diramazione.

4. - Possiamo costruire sulla superficie F involuzioni cicliche con un numero finito di punti uniti.

Sia $X_0 = 0$ l'equazione dell'iperpiano di S_N contenente la superficie Φ. Rappresentando Φ sopra un piano φ di cui x_1, x_2, x_3 sono le coordinate e ponendo

$$\rho X'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = x_{i_1} x_{i_2} \cdot \cdot \cdot x_{i_n}$$

possiamo assumere le X come coordinate dell'iperpiano $X_0 = 0$. Allora X_0 e le X sono le coordinate di S_N.

Consideriamo nel piano φ l'omografia ciclica d'ordine p

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \varepsilon\, x_2 : \varepsilon^{\alpha} x_3,$$

dove si designa con ε una radice primitiva d'ordine p dell'unità e con α un intero compreso tra 1 e p.

Abbiamo in corrispondenza nell'iperpiano della Φ una omografia ciclica; scriveremo

$$1) \qquad \rho X'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} X_{i_1 i_2 \ldots i_n} .$$

Aggiungeremo a queste equazioni

$$\rho X'_0 = \eta X_0 ,$$

dove η è una radice primitiva dell'unità.

Abbiamo così in S_N un'omografia ciclica H di periodo p.

Sulla Φ, l' omografia H ha tre punti uniti, che diremo O_1, O_2, O_3. Le rette OO_1, OO_2, OO_3 sono quindi unite per H. Osserviamo che

$$\varepsilon_{11 \cdots 1} = 1, \ \varepsilon_{22 \cdots 2} = \varepsilon^{n}, \ \varepsilon_{33 \cdots 3} = \varepsilon^{\alpha n}.$$

È chiaro inoltre che può porsi i più piccoli interi positivi congruenti ad $n, \alpha n$ *mod.* p invece degli esponenti $n, \alpha n$.

Il cono V_3 è trasformato in sè da H. Supporremo che la ipersuperficie V^m_{N-1} sia anche trasformata in sè da H.

Se $p = m$ possiamo scegliere η diverso da 1, ε^n, $\varepsilon^{\alpha n}$ e supporre di più che la varietà V^m_{N-1} non contenga O, O_1, O_2, O_3. Abbiamo allora su di F un'involuzione senza punti uniti.

Supposto invece che sia $\eta = 1$ per esempio, otteniamo su di F un'involuzione che avrà in generale m punti uniti.

Se $p \neq m$ possiamo fare per esempio $\eta = 1$ e supporre che V^m_{N-1} abbia opportuni contatti colle rette OO_2, OO_3, nei punti O_2, O_3. Abbiamo allora un'involuzione con $m + 2$ punti uniti.

5. - Supponiamo adesso che l'ipersuperficie V^m_{N-1} passi semplicemente pel punto O, vertice del cono V_3 e contenga un cono ψ d'ordine νn ($\nu < n$) di V_3. Fuori del cono ψ, le varietà V_3 e V^m_{N-1} hanno in comune una superficie F d'ordine $mn^2 - n\nu$; il punto O ha la molteplicità $n(n - \nu)$ per la superficie F ed è equivalente, sopra questa superficie, ad una curva D.

Il sistema delle sezioni iperpiane di F è adesso

$$| (n - \nu) C + D |,$$

dove C designa la curva variabile segata da V^m_{N-1} sopra un cono γ. Il sistema $| C |$ ha adesso il grado $m - 1$.

Consideriamo di nuovo la rappresentazione di un cono γ sul piano σ. Alla curva C tracciata su questo cono corrisponde nel piano σ una curva Γ che, colla retta p e ν rette uscenti da A, ha complessivamente l'ordine $(n+1)m$ col punto nm-plo A ed i punti m-pli $A_0, A_1, \cdots, A_n$. La curva Γ è quindi d'ordine $(n+1)m - \nu - 1$, ha la molteplicità $mn - \nu$ in A e la molteplicità $m - 1$ in $A_0, A_1, \cdots, A_n$.

Le curve aggiunte d'ordine $(n+1)m - \nu - 4$ alle curve Γ hanno la moltiplicità $mn - \nu - 1$ in A ed $m - 2$ nei punti $A_0, A_1, \cdots, A_n$. Le rette $AA_0, AA_1, \cdots, AA_n$ sono parti di queste curve ed il sistema aggiunto puro di Γ è quindi :

$$| \Gamma' | = | (m - 3) \varphi + (2n - \nu - 2) g |.$$

Ne concludiamo che l' aggiunto a $| C |$ è

$$| C' | = | (m - 3)(n - \nu) C + (m - 3) D + (2n - \nu - 2) C |,$$

cioè

$$| C' | = | [(m - 1)(n - \nu) + \nu - 2] C + (m - 3) D |.$$

6. - Il sistema canonico della superficie F è

$$| K | = | C' - C | = | [(m - 1)(n - \nu) + \nu - 3] C + (m - 3) D |.$$

Per $n = 2$, $m = 3$, otteniamo una superficie con curva canonica d'ordine zero, avente un punto doppio O.

Per $n = 2$, $m = 4$, la superficie F ha il sistema canonico

$$| C + D |,$$

vale a dire che il sistema delle sezioni iperpiane di F coincide col sistema canonico. Si ha $p_g = p_a = 6$.

Quest'ultima superficie è l'unica superficie canonica ottenibile col nostro procedimento. Infatti, supposto che il sistema canonico sia il sistema delle sezioni iperpiane $| (n - \nu) C + D |$, abbiamo $m = 4$, poi

$$3n - 2\nu - 3 = n - \nu,$$

quindi $\nu = 2n - 3$. Siccome $\nu < n$, abbiamo $n < 3$, cioè $n = 2$.

Liegi, 29 settembre 1950.