Extrait du « *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* » n° 2, 1949

Exemple de la détermination de la singularité d'une surface multiple en un point de diramation isolé

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Dans un mémoire récent (¹), nous avons indiqué une méthode permettant de déterminer la singularité d'un point de diramation isolé d'une surface multiple. Nous avons appliqué cette méthode à différents exemples. Dans celui qui fait l'objet de cette note, nous trouvons un point de diramation quadruple pour la surface multiple, le cône tangent en ce point à cette surface se composant d'un cône du second ordre et de deux plans. A ce point sont infiniment voisins successifs deux points doubles, le premier biplanaire et le second conique. C'est cette particularité, que nous rencontrons pour la première fois, qui nous a engagé à rédiger ce travail.

Dans les différents exemples que nous avons traités, le cône tangent en un point de diramation d'une surface multiple se scinde en deux parties au moins et en trois au plus. Il semble bien que cette propriété soit générale et nous espérons pouvoir l'établir prochainement.

1. — Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_{31}, d'ordre 31, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Considérons un de ces points unis A et supposons que dans le faisceau des tangentes à F en A, la transformation birationnelle T de F en soi, génératrice de l'involution, détermine la correspondance

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \varepsilon^{13} \mu, \tag{1}$$

ε étant une racine primitive d'ordre 31 de l'unité.

Construisons sur F un système linéaire $|C|$, dépourvu de points-base, transformé en soi par T et contenant un système

(¹) *Les points unis des involutions appartenant à une surface algébrique* (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1948, pp. 189-210). Voir aussi notre exposé : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Act. Scient., n° 270, Paris, Hermann, 1935) et une note *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples*, en cours d'impression dans les Bulletins de l'Académie, janvier 1949.

linéaire partiel $|C_o|$, dépourvu de points-base, appartenant à l'involution I_{31}.

Dans le système $|C|$, il existe deux systèmes linéaires partiels, appartenant à l'involution, ayant A comme point-base simple; nous désignerons par $|C_1|$, $|C_2|$ ces systèmes. Les courbes C_1 C_2 ont des tangentes fixes en A, ces tangentes étant les droites unies dans la correspondance (1). Nous commencerons par préciser le comportement des courbes C_1, C_2 en A.

Le plus petit entier β satisfaisant à la congruence

$$14\beta - 1 \equiv 0, \qquad \text{(mod. 31)}$$

est $\beta = 20$. La correspondance (1) peut donc aussi être représentée par

$$\lambda' : \mu' = \varepsilon^{19}\lambda : \mu.$$

Les courbes C_1 ont en commun une suite de 13 points $A_{1,1}$, $A_{1,21}$, ..., $A_{1,13}$ infiniment voisins succesifs de A; ces points sont unis pour I_{31} et le dernier est uni parfait.

Les courbes C_2 ont en commun une suite de 19 points $A_{2,1}$, $A_{2,2}$ ..., $A_{2,19}$ infiniment voisins successifs de A, unis pour l'involution I_{31}, le dernier étant uni parfait.

2. — Ainsi que nous l'avons établi, il existe dans le système linéaire $|C_o|$, 16 systèmes linéaires $|C'_o|$, $|C''_o|$, ..., $|C_o^{(16)}|$ dont les courbes passent par A et ont en ce point des multiplicités croissantes. Les courbes des quinze premièrs systèmes ont en A des multiplicités inférieures à 31 et des tangentes confondues avec les droites $AA_{1,1}$, $AA_{2,1}$. Les courbes $C_o^{(16)}$ ont en A la multiplicité 31 et des tangentes variables.

Soient λ, μ deux entiers positifs satisfaisant à la congruence

$$\lambda + 14\mu \equiv 0\,, \qquad \text{(mod. 31)}$$

et tels que $\lambda + \mu < 31$. Il y a 15 couples de nombres λ, μ satisfaisant à ces conditions; nous les désignerons par λ_i, μ_i (i = 1, 2, ..., 15) et disposerons des indices pour avoir

$$\lambda_i + \mu_i < \lambda_{i+1} + \mu_{i+1}.$$

Nous avons démontré que les courbes $C_o^{(i)}$ ont en A la même multiplicité que les courbes $\lambda_i C_2 + \mu_i C_1$ et qu'elles ont de plus λ_i tangentes confondues avec $AA_{2,1}$, μ_i tangentes confondues avec $AA_{1,1}$.

Nous avons

$$\lambda_1=3,\ \mu_1=2;\ \lambda_2=6,\ \mu_2=4;\ \lambda_3=1,\ \mu_3=11;\ \lambda_4=9,\ \mu_4=6;\ \ldots$$

3. — Envisageons les courbes C'_o. Elles ont en A la multiplicité cinq, deux tangentes confondues avec $AA_{1,1}$, et trois avec $AA_{2,1}$.

Les courbes C_1 doivent rencontrer les courbes C'_o en 31 points confondus avec A, par conséquent, les courbes C'_o passent doublement par les 13 points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, ..., $A_{1,13}$.

Les courbes C_2 doivent également rencontrer les courbes C'_o en 31 points confondus en A et d'autre part, les courbes C'_o doivent passer par $A_{2,19}$. Il en résulte que sur chaque courbe C'_o, le point A est l'origine d'une branche superlinéaire. Les courbes C'_o passsent 3 fois par les x premiers des points $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, ..., $A_{2,19}$, deux fois par le point suivant et une fois par les $18 - x$ points restants. On doit avoir

$$5 + 3x + 2 + 18 - x = 31,$$

d'où $x = 3$. Les courbes C'_o passent donc trois fois par les points $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, deux fois par le point $A_{2,4}$ et une fois par les points $A_{2,5}$, ..., $A_{2,19}$. De plus, elles passent simplement par un point $A_{2,4,1}$, infiniment voisin de $A_{2,4}$, uni parfait pour l'involution I_{31}.

Soit r_o la dimension de $|C_o|$, dimension que l'on peut supposer aussi grande que l'on veut. En rapportant projectivement les courbes C_o aux hyperplanes d'un espace linéaire à r_o dimensions, il correspond à F dans cet espace une surface Φ image de l'involution I_{31}. Nous désignerons par n l'ordre de Φ, par Γ_o ses sections hyperplanes et par π leur genre. Le système linéaire $|C_o|$ et par suite le système $|C|$ ont le degré $31n$ et le genre $31\pi - 30$.

Au point A correspond un point A' sur Φ et aux courbes C'_o les courbes découpées sur Φ par les hyperplans passant par A'. Nous désignerons ces sections hyperplanes par Γ'_o.

Aux domaines des points unis parfaits $A_{1,13}$, $A_{2,19}$, $A_{2,4,1}$ correspondent sur Φ des courbes infiniment petites, infiniment voisines de A', à savoir une conique et deux droites. Le point A' est donc quadruple pour Φ et le cône tangent à cette surface en ce point se compose d'un cône du second ordre et de deux plans.

Pour étudier de plus près la singularité de Φ au point A', projetons cette surface de ce point sur un hyperplan de l'espace ambiant. Nous obtenons une surface Φ', d'ordre $n - 4$, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'_o. Au domaine du point A' sur Φ correspondent sur Φ' :

Une conique α_2 homologue du domaine du point $A_{1,13}$;
Une droite β'_1, homologue du domaine du point $A_{2,19}$;
Une droite β_1, homologue du domaine du point $A_{2,4,1}$.

4. — Les courbes C''_0 ont en A la multiplicité 10, 4 tangentes étant confondues avec $AA_{1,1}$ et six avec $AA_{2,1}$. Nous désignerons par Γ''_0 les courbes qui leur correspondent sur la surface Φ'. Comme $|C''_0|$ a la dimension $r_0 - 2$, les courbes Γ''_0 sont découpées sur Φ' par les hyperplans passant par un point A'_1.

Si le point A'_1 n'appartient pas à la conique α_2, les courbes C''_0 passeraient deux fois par $A_{1,13}$ et par suite au moins deux fois par les points $A_{1,1}, \ldots, A_{1,12}$. Mais les courbes C_1 doivent rencontrer les courbes C''_0 en p points confondus en A, ce qui serait impossible. Le point A'_1 appartient donc à la conique α_2 et $A_{1,13}$ est simple pour les courbes C''_0.

Si le point A'_1 appartenait à la droite β'_1, les courbes C''_0 ne passent pas par le point $A_{2,19}$, mais passent simplement par le point $A_{2,4,1}$. Elles ne peuvent passer par le point $A_{2,5}$, car alors elles passeraient six fois par $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, cinq fois par $A_{2,4}$ et seraient rencontrées en plus de 31 points confondus en A par les courbes C_2. Dans ces conditions, les courbes C''_0 doivent passer une fois par $A_{2,4}$ et deux fois par $A_{2,3}$. Mais alors, comme elles passent six fois au plus par les points $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, elles seraient rencontrées en moins de 31 points confondus en A par les courbes C_2. Le point A'_1 n'appartient donc pas à la droite β'_1.

Le point A'_1 appartient à la droite β_1, car autrement, les courbes C''_0 seraient rencontrées en plus de 31 points confondus en A par les courbes C_2.

En raisonnant comme pour les courbes C'_0, on voit que les courbes C''_0 passent 3 fois par $A_{2,1}$ et une fois par les 18 points $A_{2,2}, \ldots, A_{2,19}$; elles passent de plus deux fois pas un point $A_{2,1,1}$ infiniment voisin de $A_{2,1}$, une fois par un point $A_{2,1,2}$ infiniment voisin de $A_{2,1,1}$ et enfin une fois par un point $A_{2,1,2,1}$, uni parfait pour l'involution, infiniment voisin du point $A_{2,1,2}$.

On établit de même que les courbes C''_0 passant quatre fois par les points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, trois fois par $A_{1,3}$ et une fois par $A_{1,4}, \ldots, A_{1,13}$. Elles passent de plus une fois par des points $A_{1,3,1}$, $A_{1,3,1,1}$ infiniment voisins successifs de $A_{1,3}$, le dernier de ces points étant uni parfait pour l'involution.

Il en résulte que le point A'_1 est double biplanaire pour la surface Φ', le domaine de ce point sur cette surface se composent de deux droites infiniment petites, infiniment voisines de A'_1, homologues des domaines des points $A_{1,3,1,1}$ et $A_{2,1,2,1}$.

Projetons la surface Φ' de A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une surface Φ'', d'ordre $n - 6$, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ''_o.

Aux domaines des points $A_{1,2,1,1}$ et $A_{2,1,2,1}$ correspondent sur Φ'' des droites α_1, β''_1 se rencontrant en un point A'_2 et qui représentent le domaine de A'_1 sur Φ'. A la conique α_2 correspond sur Φ'' une droite, que nous désignerons encore par α_2, rencontrant en un point la droite α_1. A la droite β'_1 correspond une droite β'_1 et à la droite β_1, un point appartenant à la droite β''_1.

5. — Les courbes C'''_o ont en A la multiplicité 12, une tangente étant confondue avec $AA_{2,1}$ et les 11 autres avec $AA_{1,1}$. Il leur correspond sur Φ'' les sections Γ'''_o de cette surface par les hyperplans passant par un point $\overline{A}$.

Les courbes C'''_o passent nécessairement une fois par les points $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, ..., $A_{2,19}$ et par conséquent, elles ne passent plus par le point $A_{2,1,2,1}$. Le point $\overline{A}$ appartient donc à la droite β''_1.

La droite β''_1 ne rencontre pas la droite α_1, donc $\overline{A}$ ne peut appartenir à cette dernière droite. Les courbes C'''_o passent donc simplement par $A_{1,13}$. En raisonnant comme précédemment, on voit que les courbes C'''_o passent 7 fois par $A_{1,1}$, une fois par $A_{1,2}$, ..., $A_{1,13}$, quatre fois par un point $A_{1,1,1}$, deux fois par un point $A_{1,1,1,1}$ et par un point $A_{1,1,1,1,1}$, uni parfait pour l'involution, les points $A_{1,1,1}$, $A_{1,1,1,1}$, $A_{1,1,1,1,1}$ étant infiniment voisins successifs de $A_{1,1}$. Ces courbes ne passent donc plus par $A_{1,2,1,2}$ et $\overline{A}$ appartient donc à la droite α_1; il coïncide donc avec A'_2.

Le point A'_2 est double conique pour Φ'', son domaine sur cette surface correspondant au domaine du point $A_{1,1,1,1,1}$.

Projetons Φ'' du point A'_2 sur un hyperplan; nous obtenons une surface Φ''' d'ordre $n - 8$, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'''_o. Au domaine du point A'_2 sur Φ'', c'est-à-dire au domaine du point $A_{1,1,1,1,1}$ sur F, correspond une conique γ_2. Aux droites α_2, β'_1 de Φ'' correspondent sur Φ''' des droites α_2, β'_1. Aux droites α_1, β''_1 correspondent des points de la conique γ_2, singuliers pour Φ'''.

Sur Φ'', la droite β_1 était représentée par le domaine d'un point de la droite β''_1, singulier pour la surface. Sur Φ''', à ce point correspond le même point qu'à la droite β''_1. Désignons ce point par A'_3. Le point A'_3 est singulier pour la surface Φ''' et son domaine équivaut à deux courbes, homologues des droites β_1, β''_1. C'est ce que l'on va vérifier en considérant les courbes $C_o^{(4)}$.

6. — Les courbes $C_o^{(4)}$ ont en A la multiplicité 15 ; 9 tangentes en A à ces courbes coïncident avec $AA_{2,1}$ et 6 avec $AA_{1,1}$.

L'analyse de la singularité des courbes $C_o^{(4)}$ au point A conduit aux résultats suivants.

Les courbes $C_o^{(4)}$ passent quatre fois par le point $A_{1,1}$, deux fois par le point $A_{1,1,1}$, une fois par les points $A_{1,1,1,1}$, $A_{1,1,1,1,1}$, une fois par les points $A_{1,2}, \ldots, A_{1,13}$. Elles passent en outre six fois par $A_{2,1}$, quatre fois par $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, deux fois par $A_{2,4}$, $A_{2,4,1}$, deux fois par $A_{2,1,1}$ et une fois par $A_{2,1,2}$, $A_{2,1,2,1}$.

A ces courbes correspondent sur Φ''' les sections $\Gamma_o^{(4)}$ par les hyperplans passant par le point A'_3, qui est donc triple pour la surface.

Projetons Φ''' de A'_3 sur un hyperplan ; nous obtenons une surface $\Phi^{(4)}$ d'ordre $n - 11$. Sur cette surface, au domaine du point A'_3 correspondent une conique β_1 et une droite β''_1. A la conique γ_2 correspond une droite, à α_2 correspond une droite. A la droite β'_1 correspond un point. Sur Φ''', la droite β'_1 doit passer par le point A'_3 et par conséquent β'_1 doit rencontrer l'une des courbes β_1, β_1'' en un point. Observons que sur la surface Φ', la courbe $\beta'_1 + \beta_1 + \alpha_2$ doit être connexe, par conséquent β'_1 doit rencontrer β_1 en un point, mais elle ne rencontre pas β''_1.

Il est inutile de considérer les courbes $C_o^{(5)}$; ce qui précède montre que la singularité du point A' pour la surface Φ est équivalente à l'ensemble des courbes α_2, α_1, β_1, β'_1, β''_1 et γ_2.

7. — Avant d'aller plus loin, nous allons procéder à quelques vérifications.

Comme nous l'avons indiqué, les degrés des systèmes $|\Gamma'_o|$, $|\Gamma''_o|$, $|\Gamma'''_o|$, $|\Gamma_o^{(4)}|$ sont respectivement égaux à $n - 4$, $n - 6$, $n - 8$, $n - 11$. Les genres de ces courbes doivent respectivement avoir les valeurs $\pi - 3$, $\pi - 4$, $\pi - 5$, $\pi - 7$. C'est ce que nous allons vérifier.

Le système $| C'_o |$ a le degré $31n - 124$ et le genre $31\pi - 63$. Par conséquent, le système $| \Gamma'_o |$ a bien le degré $n - 4$ et, en utilisant la formule de Zeuthen, le genre $\pi - 3$.

Le système $| C''_o |$ a le degré $31n - 186$ et le genre $31\pi - 94$. Par conséquent, le système $| \Gamma''_o |$ a bien le degré $n - 6$ et le genre $\pi - 4$.

Le système $| C'''_o |$ a le degré $31n - 248$ et le genre $31\pi - 115$. Le système $| \Gamma'''_o |$ a donc bien le degré $n - 8$ et le genre $\pi - 5$

Le système $| C_o^{(4}$ $|$ a le degré $31n - 341$ et le genre $31\pi - 172$. Il en résulte que le système $| \Gamma_o^{(4)}$ $|$ a bien le degré $n - 11$ et le genre $\pi - 7$.

8. — Le point singulier A′ de la surface Φ est donc équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles

$$\beta_1', \beta_1, \beta''_1, \gamma_2, \alpha_1, \alpha_2,$$

chacune de ces courbes rencontrant en un point la précédente et la suivante, mais ne rencontrant pas les autres.

Nous avons, sur la surface Φ, les relations fonctionnelles

$$\Gamma_o \equiv \Gamma'_o + \beta'_1 + \beta_1 + \beta''_1 + \gamma_2 + \alpha_1 + \alpha_2 ,$$
$$\Gamma_o \equiv \Gamma''_o + \beta'_1 + \beta_1 + 2(\beta''_1 + \gamma_2 + \alpha_1) + \alpha_2 ,$$
$$\Gamma_o \equiv \Gamma'''_o + \beta'_1 + \beta_1 + 2\beta''_1 + 3\gamma_2 + 2\alpha_1 + \alpha_2 ,$$
$$\Gamma_o \equiv \Gamma_o^{(4)} + \beta'_1 + 2\beta_1 + 3\beta''_1 + 3\gamma_2 + 2\alpha_1 + \alpha_2 .$$

On déduit de la première relation que les courbes β'_1, β''_1, γ_2, α_1 ont le degré virtuel -2 et les courbes β_1 α_2, le degré virtuel -3. On déduit des trois dernières relations les nombres des points d'intersection des courbes β'_1, β_1, ..., α_2 avec les courbes Γ''_o, Γ'''_o, $\Gamma_o^{(4)}$ qui ont été indiqués plus haut.

9. — Soient Γ_1, Γ_2 les courbes d'ordre n qui correspondent sur la surface Φ aux courbes C_1 ,C_2. Nous avons une relation fonctionnelle de la forme

$$31\Gamma \equiv 31\Gamma_1 + \lambda'\beta'_1 + \lambda\beta_1 + \lambda''\beta''_1 + \nu\gamma_2 + \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \Delta,$$

où λ', λ, λ'', ν, μ_1, μ_2 sont des entiers et Δ un terme qui provient des autres points de diramation de la surface Φ.

En exprimant que les courbes Γ_1 ne rencontrent que la courbe α_2, on a

$$-2\lambda' + \lambda = 0,\ \lambda' - 3\lambda + \lambda'' = 0,\ \lambda - 2\lambda'' + \nu = 0,$$
$$\lambda'' - 2\nu + \mu_1 = 0,\ \nu - 2\mu_1 + \mu_2 = 0,\ \ 31 + \mu_1 - 3\mu_2 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\lambda' = 1, \quad \lambda = 2, \quad \lambda'' = 5, \quad \nu = 8, \quad \mu_1 = 11, \quad \mu_2 = 14$$

On a donc

$$31\,\Gamma_o \equiv 31\,\Gamma_1 + \beta'_1 + 2\beta_1 + 5\beta''_1 + 8\gamma_2 + 11\alpha_1 + 14\alpha_2 + \Delta.$$

On trouverait de même

$$31\,\Gamma_o \equiv 31\,\Gamma_2 + 9\beta'_1 + 18\beta_1 + 14\beta''_1 + 10\gamma_2 + 6\alpha_1 + 2\alpha_2 + \Delta',$$

Δ' étant un terme provenant des autres points de diramation.

10. — La considération des systèmes $|C_o^{(5)}|$, $|C_o^{(6)}|$, ... n'est pas nécessaire pour déterminer la singularité du point A' pour la surface Φ. Indiquons cependant ce que l'on obtient pour les premiers de ces systèmes.

Les courbes $C_o^{(5)}$ ont la multiplicité 17 en A et passent 4 fois par $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, 2 fois par $A_{2,4}$, et $A_{2,4,1}$, deux fois par $A_{1,1}$, une fois par $A_{1,2}$, ... $A_{1,13}$, et une fois par une suite de onze points $A_{1,1,1}$, ..., $A_{1,1,11}$ infiniment voisins successifs de $A_{1,1}$. Les courbes $\Gamma_o^{(5)}$ qui leur correspondent sur $\Phi^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans qui passent par le point commun aux courbes β''_1, α_1.

Les courbes $C_o^{(6)}$ ont la multiplicité 18 en A, passent 8 fois par $A_{2,1}$, deux fois par $A_{2,2}$, $A_{2,3}$, une fois par $A_{2,4}$, $A_{2,4,1}$, six fois par $A_{2,1,1}$, trois fois par $A_{2,1,2}$, $A_{2,1,2,1}$, une fois par $A_{1,1}$, ..., $A_{1,13}$. Les courbes $\Gamma_o^{(6)}$ qui leur correspondent sur $\Phi^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite β''_1.

Les courbes $C_o^{(7)}$ ont la multiplicité 20 en A et passent six fois par $A_{2,1}$, deux fois par $A_{2,2}$, A_{23}, une fois par $A_{2,4}$, $A_{2,4,1}$ quatre fois par $A_{2\,1,1}$, deux fois par $A_{2,1,2}$ et $A_{2,1,2,1}$, six fois par $A_{1,1}$, trois fois par $A_{1,2}$, deux fois par $A_{1,3}$, une fois par $A_{1,3,1}$ et $A_{1,3,1,1}$ deux fois par $A_{1,1,1}$, une fois par $A_{1,1,1,1}$ et $A_{1,1,1,1\,1}$. Les courbes $\Gamma_o^{(7)}$ qui leur correspondent sur la surface $\Phi^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite β''_1 et par le point commun à la droite β''_1 et à la droite α_2, point qui représente la courbe α_1.

Le point commun aux courbes β''_1, α_1 est simple pour la surface $\Phi^{(4)}$. On a

$$\Gamma_o \equiv \Gamma_o^{(6)} + \beta'_1 + 2\,\beta_1 + 4\beta''_1 + 3\gamma_2 + 2\nu_1 + \alpha_2\,,$$

$$\Gamma_o \equiv \Gamma_o^{(7)} + \beta'_1 + 2\beta_1 + 4\beta''_1 + 4\gamma_2 + 3\alpha_1 + \alpha_2\,.$$

Liège, le 4 février 1949.

(3558) Ceuterick, Louvain