Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 8 novembre 1947

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la courbe canonique de genre six,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Nous avons dû récemment rechercher les courbes canoniques de genre six tracées sur la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan. Nous sommes arrivé au théorème suivant, dont la démonstration fait l'objet de cette note.

Si une courbe canonique de genre six, d'ordre dix, située dans un espace linéaire à cinq dimensions, appartient à la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un plan,

1° *Elle appartient à une surface réglée du quatrième ordre dont les génératrices sont des trisécantes de la courbe, ou*

2° *Elle est l'intersection complète de la surface qui représente les cubiques planes passant par quatre points, et d'une hyperquadrique.*

On sait que la courbe envisagée est commune à ∞^5 hyperquadriques (1). Dans le premier cas, toutes ces hyperquadriques contiennent la surface du quatrième ordre. Dans le second cas, ∞^4 de ces hyperquadriques contiennent la surface du cinquième ordre.

1. Commençons par rappeler quelques propriétés de la variété de Segre qui représente les couples de points d'une droite s_0 et d'un plan σ_0. Si nous désignons par

(1) Voir par exemple F. ENRIQUES et O. CHISINI, *Courbes et fonctions algébriques d'une variable* ; trad. LÉGAUT (Paris, Gauthier-Villars, 1926).

y_0, y_1 les coordonnées homogènes d'un point de s_0 et par z_0, z_1, z_2 celles d'un point de σ_0, les équations de la variété V_3^3 en question s'écrivent

$$\left\| \begin{matrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{10} & X_{11} & X_{12} \end{matrix} \right\| = 0,$$

en posant

$$\rho X_{ik} = y_i z_k, \quad (i = 0, 1 \; ; \; k = 0, 1, 2).$$

La variété V_3^3 contient ∞^1 plans σ et ∞^2 droites s, chacune des droites s rencontrant chacun des plans σ en un point.

Posons

$$x_0 = y_0 = z_0 \, ;$$

Il existe une correspondance birationnelle entre la variété V_3^3 et l'espace (x_0, y_1, z_1, z_2). A une section hyperplane de V_3^3 correspond dans cet espace la quadrique

$$\lambda_{00}x_0^2 + x_0(\lambda_{01}z_1 + \lambda_{02}z_2 + \lambda_{10}y_1) + y_1(\lambda_{11}z_1 + \lambda_{12}z_2) = 0,$$

passant par le point $O(x_0 = z_1 = z_2 = 0)$ et par la droite $a(x_0 = y_1 = 0)$.

La correspondance est obtenue en projetant V_3^3 de la droite

$$X_{00} = X_{01} = X_{02} = X_{10} = 0. \tag{1}$$

Par cette droite passe un plan $\sigma(X_{00} = X_{01} = X_{02} = 0)$ coupant l'espace au point O et une quadrique de V_3^3, située dans l'espace $X_{00} = X_{10} = 0$, cet espace passant par la droite a.

Aux points de V_3^3 infiniment voisins de la droite (1) correspondent les points du plan $x_0 = 0$.

2. Soit C une courbe canonique de genre six, d'ordre 10, tracé sur la variété V_3^3. Considérons un hyperplan ξ passant par un plan σ ; il coupe encore V_3^3 suivant une quadrique Q.

La courbe C appartient à ∞^5 hyperquadriques ; il y a ∞^2 hyperquadriques passant par V_3^3, donc il y a ∞^3 hyperquadriques ne contenant pas V_3^3 et passant par C. Ces hyperquadriques découpent sur un plan σ soit ∞^2 coniques, soit ∞^1 coniques si le plan appartient à une de ces hyperquadriques. On en conclut que les plans σ coupent C soit en trois points, soit en quatre points.

Dans le premier cas, ξ coupant C en dix points, cette courbe rencontre la quadrique Q en sept points et il y a donc une des ∞^3 hyperquadriques passant par C mais non par V_3^3 qui contient Q.

Dans le second cas, C rencontre la quadrique Q en six points.

3. Examinons le premier cas. A la courbe C correspond, dans l'espace Σ (x_0, y_1, z_1, z_2) une courbe C′ d'ordre dix, passant trois fois par O et s'appuyant en sept points sur la droite a.

A la section de V_3^3 par une hyperquadrique correspond dans Σ une surface du quatrième ordre passant doublement par le point O et la droite a. Deux pareilles surfaces ont en commun une courbe d'ordre 12, passant quatre fois par O et s'appuyant en huit points sur a. Par la courbe C′ passent ∞^3 de ces surfaces du quatrième ordre ; deux de ces surfaces ont encore en commun une conique passant par O et s'appuyant en un point sur a.

Un plan γ passant par O coupe encore la courbe C′ en sept points. Les surfaces du quatrième ordre passant par C′ coupent γ suivant des courbes du quatrième ordre ayant un point double en O, un point double sur la droite a, passant par les sept points de C′ distincts de O et formant par conséquent un faisceau. Il en résulte que le plan γ appartient à une des surfaces du quatrième ordre. Celle-ci est complétée par une surface cubique réglée ayant la droite double a et passant par O. Soit Φ' cette surface. Cette surface reste fixe lorsque le plan

γ varie, car une courbe d'ordre dix ne peut appartenir à deux surfaces cubiques. Il en résulte que les ∞^2 surfaces du quatrième ordre passant par C' sont formées de la surface Φ' et des ∞^2 plans passant par O.

Observons d'ailleurs qu'aux plans passant par O correspondent sur V_3^3 des quadriques ; on retrouve donc, précisée, l'observation faite plus haut.

Les plans σ' passant par a, qui correspondent aux plans σ de V_3^3, coupent C' suivant des groupes de trois points en ligne droite. Il en résulte que la courbe C contient ∞^1 trisécantes. Le lieu de ces trisécantes est une surface Φ, homologue de Φ'.

A la section de V_3^3 par un S_3 correspond dans Σ une cubique gauche passant par O et ayant a comme bisécante. Une telle cubique coupe Φ' en quatre points en dehors de O et de a, par conséquent la surface Φ est du quatrième ordre.

Les ∞^5 hyperquadriques contenant C passent toutes par la surface Φ et la courbe C est donc une courbe particulière, considérée par F. ENRIQUES (*loc. cit.*).

4. La surface Φ peut être représentée sur un plan ϖ par les coniques passant par un point P et découpant sur une droite p une involution du second ordre donnée. La droite p correspond à la droite a.

A la courbe C' correspond, dans le plan ϖ, une courbe Γ_7 du septième ordre, ayant un point quadruple en P et un point triple en un point Q qui correspond à O.

Aux sections de Φ' par les quadriques passant par O et par a correspondent dans ϖ des courbes du quatrième ordre passant deux fois par P et une fois par Q, comprenant la droite p comme partie. Les parties variables sont donc des cubiques Γ_3 passant deux fois par P et une fois par Q. Ces cubiques représentent les sections hyperplanes de la surface Φ.

Les cubiques Γ_3 forment l'adjoint pur à Γ_7 ; pour obtenir l'adjoint à Γ_7, il faut y ajouter la droite PQ.

5. Passons à l'examen du second cas, où les plans σ coupent C en quatre points.

La courbe C', d'ordre dix, qui correspond à C dans Σ a un point quadruple en O et s'appuie en six points sur la droite a.

Les surfaces du quatrième ordre passant par C' coupent un plan σ' passant par a suivant les coniques d'un faisceau. Par conséquent, une de ces surfaces contient le plan σ' comme partie ; elle est complétée par une surface cubique Ψ' ayant un point double en O et passant par a.

Les ∞^2 surfaces du quatrième ordre passant par C' comprennent ∞^1 surfaces formées de Ψ' et des ∞^1 plans passant par a ; C' est découpée sur cette surface, en dehors de a, par une surface du quatrième ordre irréductible F', passant deux fois par le point O et par la droite a.

A la surface Ψ' correspond sur V_3^3 une surface Ψ, du cinquième ordre, appartenant à ∞^4 des hyperquadriques passant par C. Cette courbe est l'intersection complète de la surface Ψ et d'une hyperquadrique.

6. Pour déterminer la surface Ψ, nous en rechercherons la représentation plane.

Représentons la surface Ψ' sur un plan ϖ en la projetant de O sur ce plan ϖ. Aux sections planes de Ψ' correspondent les cubiques passant par six points A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 situés sur une conique η qui représente les points infiniment voisins de O sur Ψ'. A la droite a correspond par exemple la droite A_5A_6.

Aux sections de Ψ' par les quadriques contenant O et a correspondent dans ϖ des courbes du sixième ordre, passant doublement par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$, contenant comme parties fixes la conique η et la droite A_5A_6. Il reste comme parties variables les cubiques Γ_3 passant par A_1, A_2, A_3, A_4. Ces cubiques correspondent aux sections hyperplanes de la surface Ψ.

A la section de Ψ' par une surface du quatrième ordre passant doublement par O et par a, c'est-à-dire à la courbe C', correspond dans ϖ une courbe d'ordre 12 passant quatre fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ et comprenant comme parties la conique η comptée deux fois et la droite A_5A_6 comptée deux fois. Il reste une courbe Γ_6 passant deux fois par les points A_1, A_2, A_3, A_4. A cette courbe Γ_6 correspond sur la surface Ψ la courbe C.

Observons que la courbe C étant canonique, les courbes Γ_3 sont les adjointes à la courbe Γ_6.

La courbe Γ_6 est le type normal des courbes de genre six de Brill et Noether.

Liège, le 22 octobre 1947.