Remarque sur la jacobienne d'un système de surfaces

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

On sait que si, dans un système linéaire de surfaces $|F|$, ∞^3, il existe une surface Φ appartenant à toutes les surfaces d'un faisceau de $|F|$, cette surface Φ est une composante de la jacobienne F_j de $|F|$. Cette propriété s'établit immédiatement de la manière suivante : Soient F_1, F_2, F_3, F_4 quatre surfaces linéairement indépendantes définissant $|F|$, les deux premières F_1, F_2 ayant Φ comme composante. Il existe une surface du faisceau déterminé par F_3, F_4 passant par un point M de Φ; soit α le plan tangent en M à cette surface. Les surfaces de $|F|$ passant par M ont en ce point pour plans tangents les plans passant par la droite commune à α et au plan tangent en M à Φ, d'où la propriété énoncée.

Notre but, dans cette courte note, est d'indiquer un système linéaire ∞^3 de surfaces dont la jacobienne contient une surface donnée, distinct de celui auquel il vient d'être fait allusion.

Soient $\Phi\,(x_1, x_2, x_3, x_4)$ une forme d'ordre ν; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ quatre formes linéairement indépendantes en x_1, x_2, x_3, x_4, d'ordre $n - \nu$; $\Psi_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\Psi_2(x_1, x_2, x_3, x_4)$ deux formes d'ordre μ et $f_1(\lambda, \mu)$, $f_2(\lambda, \mu)$, $f_3(\lambda, \mu)$, $f_4(\lambda, \mu)$ quatre formes linéairement indépendantes d'ordre $n : \mu$.

Posons

$$F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \Phi\,\varphi_i + f_i\,(\Psi_1, \Psi_2),$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

et considérons le système linéaire

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0\,.$$

Nous allons démontrer que la jacobienne de ce système contient la surface Φ comme partie

L'équation de cette jacobienne s'écrit

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \varphi_i + \Phi \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_k} \right| = 0 \qquad (1)$$

$$(i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)\ .$$

Supposons que les lignes du déterminant du premier membre de l'équation (1) s'obtiennent en faisant $i = 1, 2, 3, 4$. Ce déterminant peut se décomposer en une somme de déterminants dont les termes de la première colonne seront l'une des quantités

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \varphi_i,\ \Phi \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1},\ \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1}\ ,$$

les termes de la seconde colonne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \varphi_i,\ \Phi \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2},\ \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_2}\ ,$$

et ainsi de suite pour les troisième et quatrième colonnes.

Observons que l'on ne peut prendre pour deux colonnes les termes $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_k} \varphi_i$ sans obtenir un déterminant identiquement nul. On a en effet par exemple

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \varphi_i \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \varphi_i \quad . \quad . \right| = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \left| \varphi_i\, \varphi_i \quad . \quad . \right| \equiv 0.$$

Si l'on prend pour trois colonnes les termes

$$\frac{\partial f_i}{\partial \Psi_1} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_2} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_k}\ ,$$

on obtient également un déterminant identiquement nul. Un tel déterminant se réduit en effet à une somme de déterminants dont deux colonnes au moins sont formées de termes $\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_k}$ ou $\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_k}$.

Ces déterminants sont identiquement nuls.

Il en résulte que le déterminant du premier membre de (1) se ramène à une somme de déterminants, dont une colonne au moins contiendra des termes de la forme $\Phi \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$. Il y aura d'ailleurs des déterminants qui ne contiendront qu'une colonne formée de termes de cette espèce, par exemple de déterminant

$$\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_3} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_4} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \quad \varphi_i \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_1} \frac{\partial f_i}{\partial \Psi_2} \right| .$$

On en conclut que dans le premier membre de l'équation (1), on peut mettre Φ en évidence, d'où la propriété énoncée.

On peut également donner de cette propriété une démonstration géométrique.

Observons que le système

$$\lambda_1 f_1(\Psi_1, \Psi_2) + \lambda_2 f_2(\Psi_1, \Psi_2) + \lambda_3 f_3(\Psi_1, \Psi_2) + \lambda_4 f_4(\Psi_1, \Psi_2) = 0 \quad (2)$$

est composé au moyen du faisceau

$$\mu_1 \Psi_1 (x_1, x_2, x_3, x_4) + \mu_2 \Psi_2 = 0 .$$

Soit $\Psi = 0$ la surface de ce faisceau qui passe par un point M de la surface Φ. Désignons par α le plan tangent à cette surface Ψ en M et par β le plan tangent à la surface Φ au même point.

Les surfaces du système (2) passant par M comprennent la surface $\Psi = 0$ comme partie et touchent donc le plan α en ce point. D'autre part, les surfaces du système

$$\Phi (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4) = 0$$

passent toutes par M et y touchent le plan β. Il en résulte que les surfaces du système

$$\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4 = 0$$

passant par M touchent en ce point un plan passant par la droite $\alpha\beta$. En d'autres termes, ces surfaces touchent en M la droite $\alpha\beta$ et ce point, et par conséquent la surface Φ, appartiennent à la jacobienne du système considéré.

Liège, le 18 octobre 1950.