Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
Séance du 19 juin 1947. — N° 6

Sur les surfaces circonscrites à une surface cubique,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Nous nous proposons, dans cette note, de déterminer les surfaces d'ordre nécessairement pair $2n$, circonscrites à une surface cubique non réglée.

Si l'on désigne par Φ la surface cubique et par F la surface d'ordre $2n$, une solution du problème posé apparaît immédiatement. Si F' est une surface d'ordre n et Ψ une surface quelconque d'ordre $2n-3$, la surface générale du faisceau déteiminé par les surfaces $2F'$ et $\Phi + \Psi$ touche la surface Φ le long de la courbe intersection de cette surface et de F'. Nous laisserons de côté cette solution triviale et rechercherons les surfaces F d'ordre $2n$ touchant une surface cubique Φ le long d'une courbe C d'ordre $3n$, cette courbe n'appartenant pas à une surface d'ordre n.

Nous établirons le théorème suivant :

Si une surface d'ordre 2n *touche une surface cubique non réglée le long d'une courbe d'ordre* 3n *n'appartenant pas à une surface d'ordre* n :

1° *La surface cubique possède quatre points doubles coniques ;*

2° *La surface d'ordre* 2n *passe un nombre impair de fois par chacun de ces points doubles et possède en outre*

$$3n(2n-3) - 4n_2 + 4$$

points doubles coniques sur la courbe de contact, n_2 *étant la somme des carrés des quotients de la division par* 2 *des multiplicités de la surface aux points doubles de la surface cubique.*

Nous démontrons ensuite l'*existence de la surface d'ordre* 2n satisfaisant aux conditions précédentes.

Enfin, nous établissons dans quelles conditions la courbe de contact est la courbe double d'une surface irréductible d'ordre $2n$.

1. Soient Φ une surface cubique non réglée et F_0 une surface d'ordre $2n$ touchant Φ le long d'une courbe C, d'ordre $3n$, n'appartenant pas à une surface d'ordre n.

Représentons la surface Φ point par point sur un plan σ de manière qu'à ses sections planes correspondent les cubiques γ_3 passant par six points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Nous supposerons que ces six points n'appartiennent pas à une même conique, mais la présence des points doubles coniques de la surface Φ implique que certains groupes de trois de ces points soient alignés.

D'une manière précise :

a) Si Φ possède un point double conique P, trois des six points, par exemple A_1, A_2, A_3, appartiennent à une droite p, fondamentale pour le système $|\gamma_3|$. Aux points de la droite p correspondent les points de Φ infiniment voisins de P.

b) Si Φ possède deux points doubles coniques P_1, P_2, le système $|\gamma_3|$ possède deux droites fondamentales p_1, p_2. Le point $p_1 p_2$ est un des six points-base de $|\gamma_3|$, par exemple A_1. Deux points A_2, A_3 appartiennent à p_1 ; deux autres points A_4, A_5 appartiennent à p_2. Aux points de p_1 correspondent sur Φ les points infiniment voisins de P_1; aux points de p_2 correspondent les points infiniment voisins de P_2. Au domaine du point A_1 correspondent les points de la droite $P_1 P_2$.

c) Si Φ possède trois points doubles coniques P_1, P_2, P_3, le système $|\gamma_3|$ possède trois droites fondamentales p_1, p_2, p_3 formant un triangle dont les sommets $A_1 = p_2 p_3$, $A_2 = p_3 p_1$, $A_3 = p_1 p_2$ sont trois des six points-base. Les trois autres points-base appartiennent aux côtés du triangle; pour fixer les idées, A_4 appartient à p_1, A_5 à p_2 et A_6 à p_3. De plus, ces trois points ne sont pas en ligne droite. Aux points des droites p_1, p_2, p_3 correspondent respectivement sur Φ les points infiniment voisins de P_1, P_2, P_3. Aux domaines des points A_1, A_2, A_3 correspondent respectivement les droites $P_2 P_3$, $P_3 P_1$, $P_1 P_2$.

d) Si Φ possède quatre points doubles coniques P_1, P_2, P_3, P_4, le système $|\gamma_3|$ possède quatre droites fondamentales p_1, p_2, p_3, p_4, formant un quadrilatère complet dont les sommets sont les points A_1, A_2, ..., A_6. Aux points des droites p_1, p_2, p_3, p_4 correspondent respectivement sur Φ les points infiniment voisins P_1, P_2, P_3, P_4.

Dans ce dernier cas, nous changerons nos notations et désignerons par A_{ik} le sommet du quadrilatère commun aux droites p_i, p_k.

On sait que les points P_1, P_2, P_3, P_4 sont les sommets d'un tétraèdre et qu'à l'arête $P_i P_k$ de celui-ci correspond dans σ le domaine du point A_{ik}.

2. Considérons les surfaces F d'ordre $2n$ passant un certain nombre de fois par les points doubles éventuels de Φ. Aux sections de Φ par ces surfaces correspondent dans σ des courbes d'ordre $6n$ passant $2n$ fois par les points A_1, A_2, ..., A_6. Ces courbes d'ordre $6n$ comprennent comme parties fixes les droites fondamentales homologues des points doubles de Φ appartenant aux surfaces F considérées, chaque droite fondamentale étant comptée avec la multiplicité du point correspondant pour les surfaces F. Ces droites défalquées, il reste un système linéaire $|\gamma|$. Si parmi les surfaces F, il en est une, F_0, qui touche Φ le long d'une courbe C d'ordre $3n$, il correspond à cette courbe dans le plan σ une courbe γ' dont le double doit appartenir totalement à $|\gamma|$. Il en résulte que les courbes de $|\gamma|$ doivent être d'ordre pair et passer un nombre pair de fois par les points $A_1, A_2, \ldots, A_6$.

De plus, la courbe γ' ne doit pas appartenir à un des systèmes linéaires de σ qui correspond aux sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant éventuellement par les points doubles de Φ.

En appliquant ces remarques, nous verrons que Φ doit posséder quatre points doubles coniques sur la courbe C.

Supposons en premier lieu que Φ soit dépourvue de point double ; alors trois quelconques des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ ne sont jamais en ligne droite. Le système $|\gamma|$ est constitué par des courbes d'ordre $6n$ passant $2n$ fois par chacun des points A. Aux sections de Φ par les surfaces d'ordre n correspondent dans σ des courbes d'ordre $3n$ passant n fois par chacun des points A. La courbe γ' se trouve donc parmi ces courbes et la courbe C correspondante appartient à une surface d'ordre n.

La surface Φ doit donc posséder au moins un point double sur la courbe C.

3. Supposons que Φ possède un point double P. La courbe γ devant être d'ordre pair, la droite p doit être défalquée un nombre pair de fois des courbes d'ordre $6n$ qui correspondent aux sections de Φ par les surfaces F, c'est-à-dire que ces surfaces doivent avoir en P une multiplicité paire, soit $2v$.

Les courbes γ sont alors d'ordre $6n - 2v$, passent $2n - 2v$ fois par A_1, A_2, A_3 et $2n$ fois par A_4, A_5, A_6. La courbe γ' est donc d'ordre $3n - v$, passe $n - v$ fois par A_1, A_2, A_3 et n fois par A_4, A_5, A_6. Elle appartient au système des courbes de σ homologues des sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant v fois par P, contrairement à la condition imposée à C.

Supposons que Φ possède deux points doubles coniques P_1, P_2. Les surfaces F doivent passer un nombre pair de fois par P_1, P_2, par exemple $2v_1$ fois par P_1 et $2v_2$ fois par P_2, pour que les courbes γ passent un nombre pair de fois par A_2, A_3, A_4, A_5.

Les courbes γ sont d'ordre $6n - 2v_1 - 2v_2$ et passent $2n - 2v_1 - 2v_2$ fois par A_1, $2n - 2v_1$ fois par A_2 et A_3, $2n - 2v_2$ fois par A_4 et A_5, $2n$ fois par A_6. La courbe γ' est d'ordre $3n - v_1 - v_2$, passe

$n - v_1 - v_2$ fois par A_1, $n - v_1$ fois par A_2 et A_3, $n - v_2$ fois par A_4 ét A_5, n fois par A_6. Elle appartient par conséquent au système des courbes de σ qui correspond aux sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant v_1 fois par P_1, v_2 fois par P_2, contrairement à la condition imposée à C.

Supposons maintenant que Φ possède trois points doubles coniques P_1, P_2, P_3. Les courbes γ devant passer un nombre pair de fois par A_4, A_5, A_6, les surfaces F doivent avoir des multiplicités paires, respectivement $2v_1$, $2v_2$, $2v_3$ aux points P_1, P_2, P_3.

Les courbes γ sont d'ordre $6n - 2v_1 - 2v_2 - 2v_3$, passent $2n-2v_2-2v_3$ fois par A_1, $2n-2v_3-2v_1$ fois par A_2, $2n-2v_1-2v_2$ fois par A_3, $2n-2v_1$ fois par A_4, $2n-2v_2$ fois par A_5, $2n-2v_3$ fois par A_6. La courbe γ', d'ordre $3n - v_1 - v_2 - v_3$, passe $n - v_2 - v_3$ fois par A_1, $n-v_3-v_1$ fois par A_2, $n-v_1-v_2$ fois par A_3, $n-v_1$ fois, $n-v_2$ fois, $n-v_3$ fois respectivement par A_4, A_5, A_6. Elle appartient par conséquent au système linéaire formé par les courbes de σ qui correspondent aux sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant v_1 fois par P_1, v_2 fois par P_2, v_3 fois par P_3, contrairement à la condition imposée à C.

On voit donc que s'il existe une surface F_0 d'ordre $2n$ touchant Φ le long d'une courbe C d'ordre $3n$, n'appartenant pas à une surface d'ordre n, la surface Φ doit posséder quatre points doubles coniques sur la courbe C.

4. Supposons donc que la surface Φ possède quatre points doubles coniques P_1, P_2, P_3, P_4. Considérons les surfaces F ayant les multiplicités respectives v_1, v_2, v_3, v_4 en P_1, P_2, P_3, P_4. Les courbes γ sont d'ordre $6n-v_1-v_2-v_3-v_4$ et passent $2n - v_i - v_k$ fois par A_{ik}. Cette multiplicité doit être paire, donc v_i, v_k ont la même parité. Nous voyons donc que les quatre nombres v_1, v_2, v_3, v_4 doivent avoir la même parité; dans ces conditions, les courbes γ sont d'ordre pair.

Supposons en premier lieu que les quatre nombres en question soient pairs et posons

$$v_1 = 2v_1', \; v_2 = 2v_2', \; v_3 = 2v_3', \; v_4 - 2v_4'.$$

La courbe γ' est d'ordre $3n-v_1'-v_2'-v_3'-v_4'$ et passe $n-v_i'-v_k'$ fois par A_{ik}. Mais alors, elle appartient au système des courbes de σ homologues des sections de Φ par les surfaces d'ordre n passant v_1' fois par P_1, v_2' fois par P_2, v_3' fois par P_3, v_4' fois par P_4. Il faut donc, pour notre objet, que v_1, v_2, v_3, v_4 soient impairs.

Posons

$$v_1 = 2v_1' + 1, \quad v_2 = 2v_2' + 1, \quad v_3 = 2v_3' + 1, \quad v_4 = 2v_4' + 1.$$

Les courbes γ sont d'ordre $6n - 2(v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4) - 4$ et passent $2n - 2v'_i - 2v'_k - 2$ fois par A_{ik}. La courbe γ' est d'ordre $3n - v'_1 - v'_2 - v'_3 - v'_4 - 2$ et passe $n - v'_i - v'_k - 1$ fois par A_{ik}. Elle rencontre la droite p_1 en $2v'_1 + 1$ points en dehors de A_{12}, A_{13}, A_{14} et par conséquent la courbe C a la multiplicité $2v'_1 + 1$ en P_1. De même, C a la multiplicité $2v'_i + 1$ en P_i.

Si la courbe C appartenait à une surface d'ordre n, celle-ci devrait passer $v'_i + 1$ fois par P_i. A la section de Φ par une telle surface correspondrait dans σ, en dehors des droites p_1, p_2, p_3, p_4, une courbe d'ordre $2n - v'_1 - v'_2 - v'_3 - v'_4 - 4$, passant $n - v'_i - v'_k - 2$ fois par A_{ik}. Le système formé par ces courbes ne peut contenir γ'.

Nous voyons donc que s'il existe une surface F_0 d'ordre $2n$ touchant Φ le long d'une courbe C d'ordre $3n$ n'appartenant pas à une surface d'ordre n, la surface Φ possède quatre points doubles coniques et la surface F_0 passe un nombre impair de fois par chacun de ces points.

5. La quadrique polaire d'un point quelconque M par rapport à Φ passe par les points P_1, P_2, P_3, P_4 et coupe encore C en $6n - 2n_1 - 4$ points, où l'on a posé

$$n_1 = v'_1 + v'_2 + v'_3 + v'_4.$$

Il en résulte que la développable engendrée par les plans tangents à Φ et à F_0 aux points de C est de classe $6n - 2n_1 - 4$.

La surface polaire d'ordre $2n - 1$ de M par rapport à F_0 a les multiplicités $2v'_1, 2v'_2, 2v'_3, 2v'_4$ en P_1, P_2, P_3, P_4; donc elle rencontre encore C, en dehors de ces points, en $6n^2 - 3n - 4n_2 - 2n_1$, en posant

$$n_2 = v'^2_1 + v'^2_2 + v'^2_3 + v'^2_4.$$

Parmi ces points se trouvent les points de contact des plans tangents à Φ et à F_0 passant par M. En un autre de ces points, le plan tangent à F_0 ne peut être déterminé, car alors il serait tangent à Φ et passerait par M, ce qui est impossible. Il en résulte qu'un tel point est double pour la surface F_0 et en général double conique.

La surface F_0 possède

$$N = 3n(2n - 3) - 4n_2 + 4$$

points doubles sur la courbe C.

6. Nous allons maintenant supposer, pour plus de généralité, que la surface F_0 passe une fois par les points $P_1, \ldots, P_k$ et $2v'_i + 1$ fois par P_i, pour $i = k + 1, \ldots, 4$. De plus, pour simplifier les notations, aucune confusion n'étant plus possible, nous écrirons v_i au lieu de v'_i.

Considérons une surface Ψ, d'ordre $2n-3$, ne passant pas par $P_1, \ldots, P_k$, mais passant $2v_i-1$ fois par le point P_i $(i=k+1, \ldots, 4)$. Si $k=0$, on supposera de plus que Ψ ne contient pas la courbe C. La surface Ψ rencontre encore la courbe C, en dehors des points doubles de Φ, en $N-k$ points et nous pouvons supposer, si $k=0$, que ces points ne sont pas des points doubles de F_0.

La surface $\Phi+\Psi$ peut être considérée comme une surface d'ordre $2n$ touchant Φ le long de la courbe C. Elle possède bien N points doubles sur cette courbe.

Il en résulte que les surfaces F_0 et $\Phi+\Psi$ déterminent un faisceau de surfaces d'ordre $2n$ touchant la surface Φ le long de la courbe C. Chaque surface du faisceau passe $2v_i+1$ fois par P_i $(i=k+1, \ldots, 4)$ et possède N points doubles sur la courbe C.

Soit R un point de C qui ne soit pas multiple pour F_0 et qui n'appartienne pas à Ψ. Il existe une et une seule surface du faisceau touchant en R une droite non tangente en ce point à Φ. Cette surface possède un point double en R et ce point est un des N points doubles de cette surface situés sur la courbe C. En effet, s'il en était autrement, la surface considérée aurait $N+1$ points doubles sur la courbe C et passerait doublement par cette courbe. Mais alors, toutes les surfaces du faisceau auraient N points doubles fixes sur C et la surface Ψ passerait par les points doubles de F_0, contrairement à l'hypothèse.

Par conséquent, les groupes de N points doubles des surfaces du faisceau forment sur C une série d'indice un. Cette série est rationnelle, puisqu'en correspondance biunivoque avec les surfaces du faisceau. C'est donc une série linéaire.

On en conclut que le groupe de N points doubles de F_0 sur C appartient à la somme de la série linéaire découpée sur C par les surfaces Ψ en dehors de $P_{k+1}, \ldots, P_4$, et du groupe $P_1+\ldots+P_k$.

7. Supposons qu'il existe une surface F_1, d'ordre $2n$, ayant la courbe C comme courbe double. Les surfaces F_0 et F_1 déterminent un faisceau de surfaces d'ordre $2n$ touchant la surface Φ le long de C et toutes les surfaces de ce faisceau ont N points doubles fixes sur cette courbe.

Il existe une surface du faisceau comprenant Φ comme partie ; elle est complétée par une surface Ψ, d'ordre $2n-3$, ayant la multiplicité $2v_i-1$ en P_i $(i=k+1, \ldots, 4)$ et passant par les N points doubles de F_0 sur C.

Inversement, supposons qu'il existe une surface Ψ d'ordre $2n-3$ passant $2v_i-1$ fois par P_i $(i=k+1, ..., 4)$ et par les N points doubles de F_0 situés sur C. Les surfaces F_0 et $\Phi+\Psi$ déterminent un faisceau dont toutes les surfaces ont les mêmes singularités sur C. Il existe une surface du faisceau touchant en un point R de C une droite non tangente en ce point à Φ. Cette surface possède un point double en R et par conséquent passe doublement par la courbe C. Observons que pour que cette surface soit irréductible, il faut qu'elle ne coïncide pas avec la surface $\Phi+\Psi$, c'est-à-dire qu'il faut que la courbe C n'appartienne pas à Ψ. Cela exige que l'on ait $k=0$.

Nous voyons donc que si l'on peut mener une surface Ψ par les N points doubles de F_0 sur C, ne contenant pas cette courbe, il existe une surface irréductible F_1 d'ordre $2n$ ayant C comme courbe double, k étant nul.

8. La courbe γ' et par conséquent la courbe C sont de genre

$$\pi=\frac{3}{2}n(n-1)-(n_1+n_2).$$

On a

$$N>2\pi-2,$$

car la courbe C étant supposée irréductible, la surface F_0 ne peut passer par les arêtes du tétraèdre $P_1P_2P_3P_4$ et l'on a donc

$$v_i+v_k\leq n-1$$

Il en résulte que sur C, la série linéaire des points doubles des surfaces touchant Φ le long de C est non spéciale ; elle a donc la dimension

$$N-\pi=\frac{3}{2}n(3n-5)-3n_2+n_1+4.$$

Les surfaces Ψ, d'ordre $2n-3$, ne comprenant pas Ψ comme partie et passant $2v_i-1$ fois par le point P_i $(i=1, 2, 3, 4)$, dépendent de

$$6n_2-15n+9-\frac{1}{3}(4n_3-n_1)_2$$

paramètres, où l'on a posé

$$n_3=v_1^3+v_2^3+v_3^3+v_4^3.$$

Pour que l'on puisse mener une surface Ψ par les N points doubles de F_0 sur C, on doit avoir

$$6n^2-15n+9-\frac{1}{3}(4n_3-n_1)\geq\frac{3}{2}n(3n-5)-3n_2+n_1+4,$$

c'est-à-dire

$$9n(n-5) - 2(4n_3 - 9n_2 + 2n_1) + 30 \geq 0.$$

Dans ces conditions, il existe donc une surface irréductible F_1, d'ordre $2n$, ayant C comme courbe double.

En particulier, si l'on fait $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1$, il existe, pour $n \geq 4$, une surface d'ordre $2n$ ayant C comme courbe double et les quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 sont triples à la fois pour la surface et pour la courbe C.

9. Il reste maintenant à établir l'existence de la surface F_0. Nous commencerons par considérer le cas où cette surface passe simplement par les points doubles P_1, P_2, P_3, P_4 de la surface Φ $(v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0)$.

Rapportons le plan σ au triangle diagonal du quadrilatère complet formé par les droites p_1, p_2, p_3, p_4. On peut choisir le point unitaire de telle sorte que ces droites aient respectivement pour équations

$$\alpha_1 \equiv x_1 - x_2 - x_3 = 0, \qquad \alpha_2 \equiv -x_1 + x_2 - x_3 = 0,$$
$$\alpha_3 \equiv -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \qquad \alpha_4 \equiv x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Les cubiques γ_3 circonscrites au quadrilatère complet ont pour équation

$$\lambda_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 + \lambda_2 \sigma_3 \alpha_4 \alpha_1 + \lambda_3 \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 + \lambda_4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 0.$$

Rapportons projectivement ces courbes aux plans de l'espace en posant

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 : \alpha_3 \alpha_4 \alpha_1 : \alpha_4 \alpha_1 \alpha_2 : \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3.$$

Alors, aux points de σ correspondent les points de la surface cubique Φ d'équation

$$X_2 X_3 X_4 + X_3 X_4 X_1 + X_4 X_1 X_2 + X_1 X_2 X_3 = 0.$$

En effet, on a

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 = X_2 X_3 X_4 : X_3 X_4 X_1 : X_4 X_1 X_2 : X_1 X_2 X_3$$

et

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

L'équation de la courbe γ' peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_1 \varphi_1(X_1, X_2, X_3, X_4) + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 = 0,$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sont des polynomes de degré $n-1$ en X, donc de degré $3n-3$ en x.

Elevons au carré les deux membres de l'équation précédente; le résultat peut s'écrire sous la forme

$$(X_2 X_4 + X_3 X_4 + X_2 X_3) \varphi_1^2 + (X_3 X_4 + X_1 X_4 + X_3 X_1) \varphi_2^2$$
$$+ (X_1 X_4 + X_2 X_4 + X_1 X_2) \varphi_3^2$$
$$- 2 X_1 X_4 \varphi_2 \varphi_3 - 2 X_2 X_4 \varphi_3 \varphi_1 - X_3 X_4 \varphi_1 \varphi_2 = 0.$$

Cette équation représente une surface d'ordre $2n$ touchant la surface Φ le long de la courbe C homologue de γ'.

Ainsi donc, l'existence de la surface F_0 est démontrée pour $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$. On passera au cas où P_1, P_2, P_3, P_4 ont des multiplicités quelconques pour F_0 en supposant que dans les polynomes φ_1, φ_2, φ_3, les termes de degré le plus élevé en X_1, X_2, X_3, X_4 manquent, de manière à obtenir les multiplicités voulues.

10. Nous terminerons par une remarque qui nous fournira une vérification de certains des points établis plus haut.

Les surfaces cubiques ayant des points doubles en P_1, P_2, P_3, P_4 forment un système homaloïdal. En rapportant projectivement ces surfaces aux plans de l'espace, on définit une transformation birationnelle T qui fait correspondre :

a) à la surface F_0, une surface F'_0 d'ordre $6n - 2n_1 - 4$;

b) à la surface Φ, un plan φ;

c) à la courbe C, une courbe C′ d'ordre $3n - n_1 - 2$ le long de laquelle le plan φ touche la surface F'_0.

La surface F'_0 doit posséder N points doubles coniques sur C′.

Pour vérifier ce point, observons que la surface F_0 coupe la droite $P_1 P_2$, par exemple, en dehors de P_1, P_2, en $2n-2v_1-2v_2-2$ points. Cette droite appartient à Φ et F_0 touchant Φ en chaque point d'intersection; la surface F_0 touche la droite $P_1 P_2$ en $n - v_1 - v_2 - 1$ points. On sait que la droite $P_1 P_2$ est fondamentale de seconde espèce pour la transformation T. Celle-ci fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces cubiques Φ' circonscrites à un tétraèdre $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$ et la droite fondamentale de seconde espèce associée à $P_1 P_2$ est la droite $P'_3 P'_4$. La surface F'_0 passe $2n - 2v_1 - 2v_2 - 2$ fois par cette droite et elle admet $n - v_1 - v_2 - 1$ droites doubles infiniment voisines de cette droite.

Cela étant, considérons la première polaire d'un point M par rapport à F'_0. C'est une surface d'ordre $6n - 2n_1 - 5$, passant

$2n - 2v_1 - 2v_2 - 3$ fois par la droite $P'_3\,P'_4$ et une fois par chacune des $n - v_1 - v_2 - 1$ droites infiniment voisines de cette droite. Il en résulte que parmi les intersections de cette première polaire avec C′, il y en a

$$(2n - 2v_1 - 2v_2 - 3)\ n - v_1 - v_2 - 1) + 2(n - v_1 - v_2 - 1)$$

absorbées au point de rencontre du plan φ avec $P'_3\,P'_4$

Par conséquent, le nombre des points de rencontre de C′ avec la première polaire du point M par rapport à F'_0, en dehors des points fondamentaux de T, est égal à N.

En un de ces points, le plan tangent à F'_0 est indéterminé, puisqu'il doit, d'une part, coïncider avec φ et, d'autre part, passer par M. Donc, ce point est double, en général conique, pour F'_0. Cette surface possède donc bien N points doubles coniques sur la courbe C′.

Imprimerie M. HAYEZ, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4.