Remarques sur les surfaces inscrites dans une surface cubique

par LUCIEN GODEAUX

Dans des notes antérieures (1), nous nous sommes occupé des surfaces inscrites dans une surface cubique. Nous allons, dans cette nouvelle note, apporter quelques compléments à nos recherches antérieures, en formant l'équation de surfaces touchant une surface cubique en chaque point d'intersection, ou ayant un contact du second ordre avec cette surface.

I.

1. Nous avons vu que si une surface F touche une surface cubique non réglée Φ en chaque point d'intersection, cette surface possède quatre points doubles coniques par lesquels passe simplement la surface F.

On sait que la surface cubique possèdant quatre points doubles coniques est l'image de l'involution I_2 engendrée par la transformation quadratique

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_2 x_3 : x_3 x_1 : x_1 x_2. \tag{1}$$

Posons

$$\begin{aligned}
X_0 &= (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2),\\
X_1 &= (x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2),\\
X_2 &= (x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2),\\
X_3 &= (x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2),\\
Y_1 &= (x_2 - x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2),\\
Y_2 &= (x_2 + x_3)(x_3 - x_1)(x_1 + x_2),\\
Y_3 &= (x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

(1) *Sur le contact des surfaces cubiques* (Bull. de la Soc. des Sc. de Liège 1944, pp. 2-10); *Sur le contact de surfaces le long de courbes* (Idem., 1944, pp. 46-58); *Sur les surfaces circonscrites à une surface cubique* (Idem., 1947, pp. 110-119).

En interprétant X_0, X_1, X_2, X_3 comme coordonnées d'un espace ordinaire, on obtient l'équation de la surface Φ sous la forme ([1])

$$X_1X_2X_3 + X_2X_3X_0 + X_3X_0X_1 + X_0X_1X_2 = 0.$$

On a de plus les relations

$$\begin{aligned}
&Y_2Y_3 = X_0X_1, \quad Y_3Y_1 = X_0X_2, \quad Y_1Y_2 = X_0X_3,\\
&X_1Y_1 = X_2Y_2 = X_3Y_3 = - X_0(Y_1 + Y_2 + Y_3),\\
&Y_1^2 + X_2X_3 + X_0(X_2 + X_3) = 0,\\
&Y_2^2 + X_3X_1 + X_0(X_3 + X_1) = 0,\\
&Y_3^2 + X_1X_2 + X_0(X_1 + X_2) = 0.
\end{aligned}$$

L'involution I_2 possède quatre points unis $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 1,)$, $(1, -1, 1)$. $(1, 1, -1)$, qui correspondent aux sommets du tétraèdre de référence, points doubles coniques de la surface Φ.

2. Les courbes d'ordre $3n$, transformées chacune en soi par la transformation (1), passent n fois par les sommets du triangle de référence. Celles de ces courbes qui passent par les points unis de l'involution ont une équation qui peut se mettre sous la forme

$$Y_1\,\varphi_1(X_0, X_1, X_2, X_3) + Y_2\,\varphi_2 + Y_3\,\varphi_3 = 0, \tag{2}$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont des formes de degré $n - 1$ par rapport à X_0, X_1, X_2, X_3.

Elevons les deux membres de l'équation précédente au carré et tenons compte des identités écrites plus haut. Nous obtenons

$$\begin{gathered}
(X_2X_3 + X_0X_2 + X_0X_3)\,\varphi_1^2 + (X_3X_1 + X_0X_3 + X_0X_1)\,\varphi_2^2 + \\
(X_1X_2 + X_0X_1 + X_0X_2)\,\varphi_3^2 \\
- 2X_0X_1\,\varphi_2\varphi_3 - 2X_0X_2\,\varphi_3\varphi_1 - 2X_0X_3\,\varphi_1\varphi_2 = 0.
\end{gathered}$$

On peut encore écrire cette relation sous la forme

$$\begin{gathered}
X_2X_3\varphi_1^2 + X_3X_1\varphi_2^2 + X_1X_2\varphi_2^3 \\
+ X_0X_1\,(\varphi_2 - \varphi_3)^2 + X_0X_2\,(\varphi_3 - \varphi_1)^2 + X_0X_3\,(\varphi_1 - \varphi_2)^2 = 0.
\end{gathered}$$

[1] Voir le tome II de notre ouvrage sur la *Géométrie algébrique*, (Liège, Sciences et Lettres, 1949). Voir p. 188 et suiv.

Si nous interprètons X_0, X_1, X_2, X_3 comme coordonnées d'un espace S_3, cette équation représente une surface F d'ordre $2n$ qui, d'après la théorie des involutions ([1]), touche la surface Φ le long d'une courbe Γ d'ordre $3n$, passant (simplement), par les points doubles de la surface Φ.

Le développable lieu des plans tangents à Φ et à F le long de Γ, est de classe $\delta = 6n - 4$, car la polaire d'un point M par rapport à Φ coupe Γ en δ points en dehors des points doubles de Φ. La polaire du point M par rapport à F coupe Γ en $3n(2n-1)$. Parmi ces points, se trouvent les δ points de contact des plans tangents à Φ et à F passant par M. En chacun des points restants, le plan tangent à F doit être indéterminé et ces points sont donc doubles pour F.

On voit donc que la surface F possède $6n^2 - 9n + 4$ points doubles (en général coniques) sur la courbe Γ.

Les $(n-1)^3$ points communs aux surfaces

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ \varphi_3 = 0$$

sont également doubles pour la surface F. Il est aisé de former l'équation du cône tangent en un de ces points à la surface F et de constater que ces points sont doubles coniques pour la surface.

La surface F *possède* $n^3 + 3n^2 - 6n + 3$ *points doubles coniques dont* $6n^2 - 9n + 4$ *sont situés sur la courbe* Γ.

Pour $n = 1$, la surface F est un cône du second ordre; pour $n = 2$, c'est une surface du quatrième ordre possédant onze points doubles dont dix sont sur la courbe Γ.

3. Recherchons la dimension du système $|F|$.

Pour qu'une courbe d'ordre $3n$ du plan (x_1, x_2, x_3) soit transformée en une courbe d'ordre $3n$ par la correspondance (1), il faut qu'elle passe n fois par chacune des sommets du triangle

---

([1]) Voir notre *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (Annales de la Faculté des Sciences, de Toulouse, 1914, pp. 289-312) et notre exposé sur *Les Involutions, cycliques appartenant à une surface algébrique* (Act. Scient., n° 270 Paris, Hermann, 1935).

de référence. Le nombre de ces courbes linéairement indépendants est $3n\ (n+1)$.

Dans le système linéaire formé par ces courbes, il existe deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'évolution I_2. Aux courbes de l'un d'eux correspondent les sections de la surface Φ par les surfaces d'ordre n. Ce système a donc la dimension

$$\binom{n+3}{3} - \binom{n}{3} - 1 = \frac{3}{2}\, n\, (n+1)$$

Il en résulte que le second système envisagé a, d'après la théorie des homographies, la dimension $\frac{3}{2}\, n(n+1) - 1$. Or, ce système est précisément le système (2). Par conséquent.

Le système de surfaces $\{F\}$ *a la dimension* $\frac{3}{2}\, n(n+1) - 1$.

Il en résulte que les coefficients des formes φ_1, φ_2, φ_3 ne sont pas tous indépendants. On peut cependant écrire l'équation (2) en ne faisant intervenir que des coefficients essentiels.

Observons que dans le terme $Y_1\, \varphi_1\, (X_0, X_1, X_2, X_3)$, on peut toujours remplacer $Y_1\, X_1$ par $-X_0(Y_1 + Y_2 + Y_3)$. Par conséquent, on peut supposer que dans φ_1, la variable X_1 ne figure pas. De même, on peut supposer que dans φ_2, la variable X_2 manque et que dans φ_3, la variable X_3 manque. En d'autres termes, dans l'espace de la surface Φ, on peut supposer que les équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ représentent respectivement des cônes d'ordre $n-1$ de sommets $0_1(0, 1, 0, 0)$, $0_2(0, 0, 1, 0)$, $0_3(0, 0, 0, 1)$. Dans ces conditions, l'équation de la surface F contient $\frac{3}{2}\, n(n+1)$ coefficients homogènes et on retrouve le résultat précédent.

II.

4. La condition pour qu'il existe une surface F osculant une surface cubique Φ en tout point d'intersection est que celle-ci possède trois points doubles biplanaires ordinaires par lesquels passe, simplement, la surface F. Or, une surface cubique possédant trois points doubles biplanaires ordinaires est l'image d'une involution du troisième ordre engendrée dans un plan par une homographie non homologique de période trois.

Considérons dans un plan σ l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3, \tag{3}$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Posons

$$X_0 = x_1 x_2 x_3, X_1 = x_1^3, X_2 = x_2^3, X_3 = x_3^3$$

et interprètons X_0, X_1, X_2, X_3 comme coordonnées d'un espace ordinaire Σ.

Aux groupes de l'involution I_3 d'ordre trois engendrée par l'homographie (3) correspondent les points de la surface cubique Φ d'équation

$$X_0^3 = X_1 X_2 X_3.$$

Cette surface possède trois points doubles biplanaires ordinaires $O_1(0, 1, 0, 0,)$, $0_2(0, 0, 1, 0,)$, $0_3(0, 0, 0, 1)$ correspondant respectivement aux points unis $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ de l'involution I_3, .

5. Considérons, dans le plan σ, le système complet $|C|$ des courbes planes d'ordre $3n$. Il est transformé en soi par l'homographie (3) et contient trois systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ appartenant à l'involution I_3.

L'un de ces systèmes, par exemple $|C_0|$,est dépourvu de points-base et il lui correspond, sur la surface Φ, le système de courbes d'ordre $3n$ découpé par les surfaces d'ordre n. Il a donc la dimension $r_0 = \dfrac{3}{2} n(n+1)$.

Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ ont pour point-base les points unis de I_3. L'équation d'une courbe C_1, lorsque l'on effectue la transformation (3), se reproduit multipliée par ε et l'équation d'une courbe C_2 se reproduit multipliée par ε^2.

L'équation d'une courbe C_1 peut s'écrire sous la forme

$$x_2 \varphi_{3n-1}(x_1, x_2, x_3) + x_3^2 \varphi_{3n-2} + x_2^2 x_3 \varphi_{3n-3} = 0,$$

où les φ sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice et qui se reproduisent lorsque l'on effectue la transformation (3). Mais alors, ces formes sont nécessairement exprimées par

$$\varphi_{3n-1} \equiv x_1^2 \alpha_1(X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4),\ \varphi_{3n-2} \equiv x_1\, \alpha_3,\ \varphi_{3n-3} \equiv \alpha_2\ ,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des formes de degré $n - 1$ en X_0, X_1, X_2, X_3.

L'équation des courbes C_1 s'écrit donc sous la forme

$$x_1^2 x_2 \alpha_1 + x_2^2 x_3 \alpha_2 + x_3^2 x_1 \alpha_3 = 0. \tag{4}$$

De même, les courbes C_2 ont pour équation

$$x_1^2\, x_3\, \beta_1 + x_2^2\, x_1\, \beta_2 + x_3^2\, x_2\, \beta_3 = 0, \tag{5}$$

où β_1, β_2, β_3 sont des formes de degré n—1 en X_0, X_1, X_2, X_3.

Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ ont la même dimension r_1, car on passe de l'un à l'autre par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : x_3 : x_2\ .$$

$|C|$ ayant la dimension $\frac{\varphi}{2} n(n + 1)$, on a

$$r_0 + 2r_1 + 3 = \frac{9}{2} n(n + 1) + 1,$$

d'où

$$r_1 = \frac{3}{2} n(n+1) - 1\ .$$

Les coefficients qui figurent dans les polynomes α_1, α_2, ..., β_3 ne sont donc pas tous des paramètres essentiels.

6. Elevons les deux membres de l'équation (4) au cube. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} &X_1^2\, X_2\, \alpha_1^3 + X_2^2\, X_3\, \alpha_2^3 + X_3^2\, X_1\, \alpha_3^3 \\ &+ 3X_0\, (X_1\, X_2\, \alpha_1^2\, \alpha_2 + X_2\, X_3\, \alpha_2^2\, \alpha_3 + X_3\, X_1\, \alpha_3^2\, \alpha_1) \\ &+ 3X_0^2\, (X_1\, \alpha_1^2\, \alpha_3 + X_2\, \alpha_2^2\, \alpha_1 + X_3\, \alpha_3^2\, \alpha_2) + 6X_0^3\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 = 0. \end{aligned}$$

Dans l'espace Σ, cette équation représente une surface F_1, d'ordre $3n$, passant simplement par les points doubles de Φ et ayant un contact du second ordre avec cette surface le long d'une courbe Γ_1, d'ordre $3n$, ainsi qu'il résulte de la théorie des involutions [1].

La première polaire d'un point quelconque M par rapport à Φ rencontre Γ_1 en $6n - 3$ points en dehors des points doubles de cette surface, donc le développable lieu des plans tangents à Φ et à F_1 aux points de Γ_1 est de classe $\delta = 6n - 3$. La première polaire de M par rapport à F_1 coupe Γ_1 en $3n(3n - 1)$ points dont

$$3n(3n - 1) - \delta = 3(3n^2 - 3n + 1)$$

sont des points doubles de cette surface. Soit R un de ces points.

Les tangentes à Φ en R doivent rencontrer F_1 en trois points confondus en R, donc R est double biplanaire pour F_1, un des plans tangents à cette surface en ce point y touchant la surface Φ.

La surface F_1 possède donc $3(3n^2 - 3n + 1)$ points doubles biplanaires sur la courbe Γ_1.

Observons que les $(n - 1)^3$ points communs aux surfaces $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ sont triples coniques pour la surface F_1.

La surface F_1 *possède* $3(3n^2 - 3n + 1)$ *points doubles biplanaires sur la courbe* Γ_1 *et* $(n - 1)^3$ *points triples coniques; elle appartient à un système continu* $\{F_1\}$ *de dimension* $\frac{3}{2}n(n+1) - 1$.

De même, en partant de l'équation (5), on obtient une surface F_2 d'ordre $3n$, d'équation

$$\begin{aligned} & X_1^2 X_3 \beta_1^3 + X_2^2 X_1 \beta_2^3 + X_3^2 X_2 \beta_3^3 \\ & + 3X_0(X_1 X_3 \beta_1^2 \beta_3 + X_2 X_1 \beta_2^2 \beta_1 + X_3 X_2 \beta_3^2 \beta_2) \\ & + 3X_0^2(X_1 \beta_1^2 \beta_2 + X_2 \beta_2^2 \beta_3 + X_3 \beta_3^2 \beta_1) + 6 \beta_1 \beta_2 \beta_3 X_0^3 = 0, \end{aligned}$$

passant par les points doubles de Φ et osculant cette surface le long d'une courbe Γ_2 d'ordre $3n$. La surface F_2 possède $3(3n^2 - 3n + 1)$ points doubles biplanaires sur Γ_2 et $(n - 1)^3$ points triples coniques.

Pour $n = 1$, les surfaces F_1, F_2 sont des surfaces cubiques présentant chacune trois points doubles biplanaires; les courbes Γ_1, Γ_2 sont des cubiques gauches. Pour $n = 2$, les surfaces F_1, F_2 sont du sixième ordre et possèdent chacune 21 points

---

(1) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques*... (loc. cit.).

doubles biplanaires et un point triple conique; les courbes Γ_1, Γ_2 sont des sextiques de genre trois.

Dans le cas général, on peut déterminer le genre des courbes Γ_1, Γ_2 de la manière suivante : Considérons la surface F_1 dans le cas où les polynomes α_1, α_2, α_3 sont identiques. La courbe Γ_1 se réduit alors à l'intersection de Φ avec une surface d'ordre $n-1$ jointe à une cubique gauche. Il en résulte que la courbe Γ_1 et de même la courbe Γ_2 sont de genre $\frac{3}{2}\, n(n-1)$.

On retrouve également ce résultat en appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance (1, 3) existant entre une courbe Γ_1 et la courbe C_1 homologue, correspondance présentant trois points de diramation.

7. Nous terminerons en remarquant que la surface F_1 est l'image d'une involution cyclique d'ordre trois [1], ayant $3(3n^2-3n+1)$ points unis, appartenant à une surface algébrique F_1^*.

La surface F_1^* a pour équations, dans un espace à quatre dimensions,

$$X_4^3 = X_0^3 - X_1\,X_2\,X_3,$$
$$F_1(X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3) = 0\,,$$

où $F_1 = 0$ est l'équation de la surface F_1.

A la courbe Γ_1 tracée sur F_1 et aux sections planes de cette surface, correspondent sur F^* des courbes de genre $\frac{9}{2}\, n(n-1)+1$ appartenant à un même système linéaire. Les $3(3n^2-3n+1)$ points doubles biplanaires de F_1 se trouvant sur Γ_1 sont les points de diramation de la correspondance (1, 3) existant entre F_1 et F_1^*.

Liège, le 22 février 1950.

---

(1) Pour le cas $n = 2$, voir notre note *Sur la construction de surfaces algébriques triples* (Bull. de la Soc. des Sc. de Liège, 1935, pp. 259-268 274-282).