Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 2 juillet 1949

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Cinquième note).

Dans les notes précédentes (¹), nous avons considéré des surfaces multiples dont les points de diramation isolés ont des cônes tangents se décomposant en deux ou trois parties. Nous allons, dans cette note, considérer un exemple d'une surface multiple où le cône tangent en un point de diramation isolé se compose de quatre parties.

Conservant les notations de nos notes précédentes, soit λ_1, μ_1 la solution des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum. Le cas étudié correspond au fait que l'on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = hp, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = kp,$$

h et k étant supérieurs à l'unité. Dans le cas actuel, nous avons $p = 41$, $\alpha = 25$, $\beta = 23$ et on a

$$\lambda_1 + 25\mu_1 = 2.41, \qquad \mu_1 + 23\ \lambda_1 = 4.41.$$

Un autre exemple est donné par $p = 61$, $\alpha = 37$, $\beta = 33$.

Nous avons conservé dans cette note les notations de nos notes antérieures, sauf en un point. Au lieu d'écrire $A_{i,j,k,\ldots}$ pour désigner un point uni infiniment voisin d'un point uni isolé A, nous écrivons $(i, j, k, \ldots)$. D'autre part, pour éviter toute confusion avec la terminologie employée par Pieri et M. Severi (²),

(¹) Voir Bulletin de l'Académie, 1949, pp. 15-30, 262-276, 277-284, 532-541.

(²) F. Severi, *Serie, Sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (Roma, Ed. Cremonese, 1942). Voir p. 278 et suiv.

nous dirons qu'un point uni est de première ou de seconde espèce suivant que la transformation génératrice de l'involution détermine, dans le domaine du premier ordre de ce point, l'identité ou non. Un point uni de seconde espèce, par exemple, est donc ce que nous appelions point uni non parfait.

35. Considérons sur la surface F une involution cyclique I_{41} d'ordre 41 et soit A un point uni de cette involution pour lequel on a $\alpha = 25$ et par suite $\beta = 23$.

Les solutions λ, μ, telles que $\lambda + \mu < 41$, en nombres entiers positifs, rangées par valeurs croissantes des $\lambda + \mu$, des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 41),$$

sont :

$$\lambda = 7, \mu = 3 ; \lambda = 5, \mu = 8 ; \lambda = 3, \mu = 13 ; \lambda = 16, \mu = 1 ; \lambda = 1, \mu = 18 ;$$

$$\lambda = 14, \mu = 6 ; \lambda = 12, \mu = 11 ; \lambda = 10, \mu = 16 ; \lambda = 23, \mu = 4 ; \lambda = 8, \mu = 21 ;$$

$$\lambda = 21, \mu = 9 ; \lambda = 6, \mu = 26 ; \lambda = 19, \mu = 14 ; \lambda = 32, \mu = 2 ; \lambda = 4, \mu = 31 ;$$

$$\lambda = 17, \mu = 19 ; \lambda = 30, \mu = 7 ; \lambda = 2, \mu = 36 ; \lambda = 15, \mu = 24 ; \lambda = 28, \mu = 12.$$

Les courbes C_0' ont en A la multiplicité 10, 7 tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 3 avec a_α. Ces courbes passent 7 fois par le point (1, 1), 4 fois par le point (1, 2), une fois par les 20 points (1, 3), (1, 4), ..., (1, 22), 3 fois par un point (1, 2, 1) infiniment voisin de (1, 2). Elles passent en outre 3 fois par les points (α, 1), (α, 2), (α, 3), 2 fois par (α, 4), une fois par les 20 points (α, 5), (α, 6), ..., (α, 24) et une fois par un point (α, 4, 1) infiniment voisin de (α,4).

Les points (1, 22), (1, 2, 1), (α, 4, 1) et (α, 24) sont unis de première espèce pour l'involution et il leur correspond sur la surface Φ_1, dont les sections hyperplanes Γ_0' correspondent aux courbes C_0', respectivement une droite σ_1, une cubique gauche τ_1, une droite τ_α et une droite σ_α.

La surface Φ_1 est d'ordre $n - 6$ et les courbes Γ_0' de genre

$n - 5$, comme on le voit en considérant le nombre des points d'intersection de deux courbes C'_0 absorbées en A et en utilisant la formule de Zeuthen pour la correspondance entre deux courbes homologues Γ'_0, C'_0.

Sur la surface Φ, le point de diramation A′ homologue de A est sextuple et le cône tangent en ce point à cette surface se décompose en trois plans (σ_1), (τ_a), (σ_a) et un cône cubique (τ_1).

36. Les courbes C''_0 ont la multiplicité 13 en A, 5 de leurs tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 8 avec a_α.

Ces courbes passent 5 fois par le point (1,1), 3 fois par (1,2), une fois par (1, 3), (1, 4), ..., (1, 22), deux fois par (1, 2, 1). Elles passent en outre 5 fois par (α, 1), une fois par les 23 points (α,2), (α, 3), ..., (α, 24), 3 fois par le point (α, 1, 1), une fois par les points (α, 1, 1, 1), (α, 1, 1, 1, 1), (α, 1, 1, 1, 2), infiniment voisins successifs de (α, 1).

Le système $|C''_0|$ est de degré effectif $41(n - 7)$ et de genre effectif $41\pi - 250$. Il en résulte que le système $|\Gamma''_0|$ est de degré $n - 7$ et de genre $\pi - 5$. Sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_0 sont découpées par les hyperplans passant par un point A'_1 commun aux courbes τ_1, τ_α. Ce point A'_1 est simple pour la surface Φ_1. Au domaine du point A'_1 sur Φ_1 coırespond sur F le domaine du point (α, 1, 1, 1, 2).

37. Les courbes C'''_0 ont la multiplicité 17 en A, 3 de leurs tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et les 13 restantes avec a_α.

Ces courbes passent 3 fois par (1, 1), 2 fois par (1, 2), une fois par les points (1, 3), (1, 4), ..., (1, 22) et (1, 2, 1). Elles passent en outre 2 fois par (α, 1), une fois par (α, 2), (α, 3), ..., (α, 24) et une fois par une suite de points (α, 1, 1), (α, 1, 2), ..., (α, 1, 11), infiniment voisins successifs de (α, 1).

Le système $|\Gamma'''_0|$ a le degré $n - 8$ et le genre $\pi - 5$. Suı la surface Φ_1, les courbes de ce système sont découpées par les hyperplans passant par la tangente à la courbe τ_1 en A'_1.

Si nous désignons par A''_1 le point de la cubique gauche τ_1 infiniment voisin de A'_1, au domaine de ce point sur Φ_1 correspond, sur F, le domaine du point (α, 1, 11).

38. Les courbes $C_0^{(4)}$ passent 17 fois par A et de leurs tangentes en ce point, 16 sont confondues avec a_1 et une avec a_α.

Ces courbes passent 3 fois par (1, 1), une fois par (1, 2), (1, 3), ..., (1, 22), 2 fois par une suite de points (1, 1, 1), (1, 1, 2), ..., (1, 1, 6) infiniment voisins successifs de (1, 1), une fois par deux points (1, 1, 7), (1, 1, 7, 1) infiniment voisins successifs de (1, 1, 6). Ces courbes passent en outre une fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 24)$.

Le système linéaire $|\Gamma_0^{(4)}|$ a le degré $n - 9$ et le genre $\pi - 5$. Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par le plan osculateur à la cubique gauche τ_1 en A_1'. Si nous désignons par A_0''' le point de τ_1 infiniment voisin de A_1'', au domaine de ce point sur la surface Φ_1 correspond le domaine du point (1, 1, 7, 1) sur F.

39. Les courbes $C_0^{(5)}$ passent 19 fois par A, une de leurs tangentes en ce point étant confondue avec a_1 et les 18 autres avec a_α. Ces courbes passent une fois par les points (1, 1), (1, 2), ..., (1, 22) ; elles ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 24)$, car autrement, elles seraient rencontrées en plus de 41 points confondus en A par les courbes C_α.

Les hyperplans découpant sur Φ_1 les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ ne peuvent contenir la courbe τ_1, car celle-ci serait rencontrée en quelques points variables par les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ et les courbes $C_0^{(5)}$ passeraient par le point (1, 2, 1). Ces hyperplans ne peuvent contenir le plan osculateur à τ_1 en A_1', car autrement les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ contiendraient le point A_0''' et les courbes $C_0^{(5)}$ passeraient par le point (1, 1, 7, 1). Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ devant rencontrer τ_1 en trois points confondus en A_1', leurs hyperplans touchent Φ_1 en ce point. Mais alors, ces hyperplans contiennent la droite τ_α.

On en conclut que les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ passent, simplement, par le point A_1'' et rencontrent la droite τ_α en quelques points variables. Par conséquent, les courbes $C_0^{(5)}$ passent une fois par le point $(\alpha, 1, 11)$ et, avec une certaine multiplicité, par le point $(\alpha, 4, 1)$. Il faut nécessairement que les courbes $C_0^{(5)}$ passent une fois par les points $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, ... $(\alpha, 1, 11)$, donc 7 fois par $(\alpha, 1)$, 6 fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, 3 fois par $(\alpha, 4, 1)$.

Les systèmes $|\Gamma_0^{(5)}|$ a le degré $n - 13$ et le genre $\pi - 8$.

On voit de plus que les droites τ_a, σ_a se rencontrent en un point.

40. Examinons maintenant les courbes $C_0^{(6)}$, qui ont la multiplicité 20 en A, 14 de leurs tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et 6 avec a_a. Ces courbes ne peuvent plus passer par le point (1, 22).

Sur Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$, qui sont des courbes $\Gamma_0^{(5)}$ particulières, sont découpées par des hyperplans passant par τ_a, par la tangente à τ_1 en A_1' et par un point fixe de σ_1.

Observons que les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ ne peuvent passer par le point A_0''' sans contenir la courbe τ_1, mais alors, elles rencontrent cette courbe en des points variables. Par conséquent, les courbes $C_0^{(6)}$ ne peuvent passer par le point (1, 1, 7, 1).

Si les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ ne contiennent pas τ_1, les courbes $C_0^{(6)}$ ne peuvent passer par le point (1, 2, 1). L'examen des différents comportements que peuvent avoir les branches des courbes $C_0^{6)}$ d'origine A, tangentes à a_1 en ce point, montre que l'on est conduit à des absurdités. Il en résulte que les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans contenant τ_1 et τ_a. Par suite, la droite σ_1 rencontre la courbe τ_1 en un point.

Les courbes $C_0^{(6)}$ passent 14 fois par (1, 1) et 7 fois par chacun des points (1, 2), (1, 2, 1). Elles passent en outre 6 fois par chacun des points (a, 1), (a, 2), (a, 3) et 3 fois par chacun des points (a, 4), (a, 4, 1).

Le système $|\Gamma_0^{(6)}|$ a le degré $n - 20$ et le genre $\pi - 12$.

41. De ce qui précède, on conclut que la singularité de la surface Φ un point de diramation A' est équivalente à l'ensemble de quatre courbes rationnelles σ_1, τ_1, σ_a, τ_a, dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_a + \sigma_a$$

et par conséquent les courbes σ_1, τ_1, τ_a, σ_a ont respectivement les degrés virtuels -2, -5, -3, -2.

Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ appartiennent au système linéaire

$$|\Gamma_0 - \sigma_1 - \tau_1 - 2\tau_a - \sigma_a|$$

et sont précisément les courbes de ce système qui passent par le point A'_1.

Les courbes précédentes sont rencontrées par τ_a en quatre points variables, donc celles qui passent par A'_1, c'est-à-dire les courbes $\Gamma_0^{(6)}$, rencontrant la droite τ_a en trois points variables.

Les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ satisfont à la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(6)} + \sigma_1 + 2(\tau_1 + \tau_a) + \sigma_a .$$

Ces courbes rencontrent bien la cubique gauche τ_1 en 7 points variables et la droite τ_a en deux points variables.

L'examen des systèmes $|C'_0|, \ldots, |C_0^{(6)}|$ et $|\Gamma'_0|, \ldots, |\Gamma_0^{(6)}|$ suffit pour déterminer la structure du point de diramation A′. Il ne serait pas difficile de poursuivre l'étude des systèmes suivants $|C_0^{(7)}|, \ldots, |\Gamma_0^{(7)}|, \ldots$ On pourrait voir, par exemple, que les courbes $\Gamma_0^{(7)}$ coïncident avec les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ passant par le point A'_1, etc.

Liège, le 1er juillet 1949.