

## Sur une surface multiple possédant des points de diramation quintuples

par LUCIEN GODEAUX  
Membre de la Société

Dans des travaux récents <sup>(1)</sup>, nous avons exposé une méthode permettant de déterminer la structure des points d'une involution cyclique d'ordre premier appartenant à une surface algébrique et celle des points de diramation correspondants sur une surface image de l'involution. Nous avons appliqué cette méthode à plusieurs cas particuliers.

Dans la note actuelle, nous considérons des points unis d'une involution d'ordre 31, tels que les points de diramation qui leur correspondent sur une surface image de l'involution soient quintuples pour celle-ci, le cône tangent en un de ces points étant composé de trois plans et d'un cône du second ordre. Un tel point est équivalent, du point de vue des transformations birationnelles, à l'ensemble de quatre courbes rationnelles, deux de degré virtuel — 2, une de degré virtuel — 3 et la dernière de degré virtuel — 4.

---

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scientifiques*, n° 270, Paris, Hermann, 1935); *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique*, 1938, pp. 1-44); *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1938, pp. 193-222); *Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Idem*, 1948, pp. 189-210); *Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation* (*Annali di Matematica*, sous presse); *Sur les points de diramation isolés des surfaces multiples* (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1949, pp. 15-30; 270-284; 285-292; 532-541; 636-641; 828-833; 834-840); *Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation* (*Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 1949, sous presse).

Considérant une surface contenant une involution d'ordre 31 dont tous les points unis sont de l'espèce envisagée, nous déterminons les relations qui existent entre les genres linéaire, arithmétique et l'invariant de Zeuthen-Segre de la surface et les mêmes caractères de l'image de l'involution.

1. — Soit  $F$  une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre 31, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par  $T$  la transformation birationnelle de  $F$  en soi génératrice de l'involution. Nous pouvons construire sur  $F$  un système linéaire  $|C|$  transformé en lui-même par  $T$  et contenant 31 systèmes linéaires partiels  $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_{30}|$  appartenant à l'involution, le premier étant dépourvu de points-base et ayant une dimension aussi grande qu'on le veut. Si  $r_0$  est la dimension de  $|C_0|$ , en rapportant projectivement les courbes  $C_0$  aux hyperplans d'un espace linéaire à  $r_0$  dimensions, on obtient une surface  $\Phi$ , normale, image de l'involution.

Supposons que l'involution possède un point uni  $A$  tel que dans le plan tangent à  $F$  en ce point,  $T$  détermine l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^{18} x_2,$$

où  $A$  a pour coordonnées  $x_1 = x_2 = 0$  et où  $\varepsilon$  est une racine primitive d'ordre 31 de l'unité.

Nous avons, pour reprendre nos notations habituelles,  $\alpha = 18$  et par conséquent  $\beta = 19$ . Pour étudier la structure du point uni  $A$ , nous devons rechercher les solutions des congruences

$$\lambda + 18\mu \equiv 0, \quad \mu + 19\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } 31)$$

telles que

$$0 < \lambda + \mu < p.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 3, \mu_1 = 5; \lambda_2 = 8, \mu_2 = 3; \lambda_3 = 1, \mu_3 = 12; \lambda_4 = 13, \mu_4 = 1; \\ \lambda_5 = 6, \mu_5 = 10; \lambda_6 = 11, \mu_6 = 8; \lambda_7 = 4, \mu_7 = 17; \lambda_8 = 16, \mu_8 = 6; \\ \lambda_9 = 9, \mu_9 = 15; \lambda_{10} = 21, \mu_{10} = 4; \lambda_{11} = 2, \mu_{11} = 24; \lambda_{12} = 14, \mu_{12} = 13; \\ \lambda_{13} = 26, \mu_{13} = 2; \lambda_{14} = 7, \mu_{14} = 22; \lambda_{15} = 19, \mu_{15} = 11. \end{aligned}$$

Dans le système  $|C_o|$ , il existe quinze systèmes partiels

$$|C'_o|, |C''_o|, \dots, |C_o^{(i)}|, \dots, |C_o^{(15)}|,$$

le système  $|C_o^{(i)}|$  ayant en A la multiplicité  $\lambda_i + \mu_i$ ,  $\lambda_i$  tangentes étant confondues avec  $a_1$  et  $\mu_i$  avec  $a_2$ , où  $a_1, a_2$  sont les deux directions unies issues de A (et représentées dans le plan tangent à F en A par les droites  $x_1 = 0, x_2 = 0$ ).

Nous désignerons par A' le point de diramation de  $\Phi$  qui correspond à A et par

$$|\Gamma'_o|, |\Gamma''_o|, \dots, |\Gamma_o^{(i)}|, \dots, |\Gamma_o^{(15)}|$$

les systèmes linéaires qui correspondent sur  $\Phi$  aux systèmes  $|C'_o|, |C''_o|, \dots$ . Enfin, nous désignerons par  $\Phi_i$  la surface de l'espace à  $r_o - i$  dimensions dont les sections hyperplanes sont les courbes  $\Gamma_o^{(i)}$ .

L'ordre de la surface  $\Phi$  et le genre de ses sections hyperplanes  $\Gamma_o$  seront désignés par  $n$  et  $\pi$ . Dans ces conditions, le système  $|C|$  a le degré  $31n$  et le genre  $31\pi - 30$ .

2. — Les courbes  $C'_o$  ont en A la multiplicité huit, trois tangentes étant confondues avec  $a_1$  et cinq avec  $a_2$ . On a

$$3 + 5 \times 18 = 3 \times 31, \quad 5 + 3 \times 19 = 2 \times 31,$$

par conséquent les courbes  $C'_o$  passent par quatre points unis de première espèce du domaine de A.

D'une manière précise, les courbes  $C_o$  passent par 18 points (1, 1), (1, 2), ..., (1, 18) infiniment voisins successifs de A, par une autre suite de 17 points (2, 1), (2, 2), ..., (2, 17) infiniment voisins successifs de A, par un point (1, 3, 1) infiniment voisin de (1, 3) et par un point (2, 2, 1), infiniment voisin de (2, 2).

Le comportement des courbes  $C'_o$  en A est fixé par le schéma suivant :

$$\begin{aligned}
 & A^8, (2, 1)^5, (2, 2)^3, (2, 3)^1, \dots, (2, 17)^1, \\
 & (1, 1)^3, (2, 2, 1)^2, \\
 & (1, 2)^3, \\
 & (1, 3, 1)^1, (1, 3)^2, \\
 & (1, 4)^1, \\
 & \dots \\
 & (1, 18)^1,
 \end{aligned}$$

où les exposants indiquent les multiplicités des points.

Les points  $(1, 18)$ ,  $(1, 3, 1)$ ,  $(2, 2, 1)$ ,  $(2, 17)$  sont unis de première espèce pour l'involution. Aux domaines de ces points correspondent respectivement sur la surface  $\Phi_1$  : une droite  $\sigma_1$ , une droite  $\tau_1$ , une conique  $\tau_2$  et une droite  $\sigma_2$ .

La surface  $\Phi_1$  étant projectivement équivalente à la projection de  $\Phi$  à partir de  $A'$  sur un hyperplan de l'espace ambiant, le point  $A'$  est donc quintuple pour  $\Phi$ , le cône tangent à cette surface en ce point se composant de trois plans et d'un cône du second ordre.

3. — Les courbes  $C''$  ont la multiplicité 11 en  $A$ , 8 tangentes coïncident avec  $a_1$  et trois avec  $a_2$ . Leur comportement en  $A$  est fixé par le schéma

$$\begin{aligned}
 & A^{11}, (2, 1)^3, (2, 2)^2, (2, 3)^1, \dots, (2, 17)^1, \\
 & (1, 1, 3)^1, (1, 1, 2)^2, (1, 1, 1)^2, (1, 1)^3, (2, 2, 1)^1, \\
 & (1, 1, 3, 1)^1, (1, 2)^1, \\
 & \dots \\
 & (1, 18)^1.
 \end{aligned}$$

Il en résulte que sur la surface  $\Phi_1$ , les courbes  $\Gamma''$  sont découpées par les hyperplans passant par un point  $A'_1$  commun aux courbes  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ . Un calcul simple montre que  $|\Gamma''_0|$  est de degré  $n - 5$  et  $|\Gamma''_0|$  de degré  $n - 6$ . Le point  $A'_1$  est donc simple pour la surface  $\Phi_1$ . Au domaine de ce point correspond, sur  $F$ , le domaine du point  $(1, 1, 3, 1)$ , qui est uni de première espèce pour l'involution.

4. — Le schéma du comportement des courbes  $C''''$  en A est le suivant :

$$(1, 18)^1, \dots, (1, 1)^1, A^{13}, (2, 1)^2, (2, 2)^1, \dots, (2, 17)^1, \\ (2, 1, 1)^1, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (2, 1, 10)^1.$$

On en conclut que les courbes  $\Gamma''''$  sont découpées sur la surface  $\Phi_1$  par les hyperplans tangents en  $A'_1$  à la conique  $\tau_2$ . Soit  $A''_1$  le point infiniment voisin de  $A'_1$  sur cette conique. Ce point est simple pour la surface  $\Phi_1$  et du reste, le degré de  $|\Gamma''''|$  est égal à  $n - 7$ . Au domaine de ce point, correspond sur la surface  $F_1$  le domaine du point  $(2, 1, 10)$ , qui est uni de première espèce pour l'involution.

5. — Les courbes  $C_o^{(4)}$  ayant la multiplicité 14 en A, ne peuvent plus passer par le point  $(1, 18)$ . Elles sont caractérisées par le schéma

$$(1, 3)^3, \quad (1, 2)^6, \quad (1, 1)^8, \quad A^{14}, \quad (2, 1)^1, \dots, (2, 17)^1. \\ (1, 3, 1)^3. \quad (1, 1, 1)^2, \\ (1, 1, 2)^2, \\ (1, 1, 3)^1, (1, 1, 3, 1)^1.$$

Sur la surface  $\Phi_1$ , les courbes  $\Gamma^{(4)}$  sont découpées par les hyperplans passant par la droite  $\tau_1$ , la partie variable de ces courbes passant par  $A'_1$  (avec une tangente variable).

De plus, on voit que la droite  $\sigma_1$  rencontre la droite  $\tau_1$ .

6. — Les courbes  $C_o^{(5)}$  ayant la multiplicité 16 en A, ne peuvent plus passer par le point  $(2, 17)$ . Le schéma caractérisant le comportement de ces courbes en A est le suivant :

$$(1, 3)^3, (1, 2)^6, (1, 1)^6, A^{16}, (2, 1)^{10}, (2, 2)^5, \\ (1, 3, 1)^3. \quad (2, 2, 1)^5.$$



Par conséquent, sur la surface  $\Phi_5$ , les courbes  $\Gamma_o^{(7)}$  sont découpées par les hyperplans touchant la quintique  $\tau_2$  au point  $A'_1$ . Le degré de  $|\Gamma_o^{(7)}|$  est égal à  $n - 18$ .

9. — Le schéma des courbes  $C_o^{(8)}$  est

$$\begin{aligned} & (1, 3)^1, (1, 2)^2, (1, 1)^6, A^{22}, (2, 1)^6, (2, 2)^3, \\ & (1, 3, 1)^1, \quad (1, 1, 1)^4, \quad (2, 2, 1)^3. \\ & \quad (1, 1, 2)^4, \\ & (1, 1, 3, 1)^2, \quad (1, 1, 3)^2. \end{aligned}$$

Les courbes  $\Gamma_o^{(8)}$  ont donc un point double en  $A'_1$ ; elles sont découpées sur  $\Phi_5$  par les hyperplans tangents en  $A'_1$  aux courbes  $\tau_1, \tau_2$ , c'est-à-dire par les hyperplans passant par le plan tangent à  $\Phi_5$  en  $A'_1$ .  $|\Gamma_o^{(8)}|$  a le degré  $n - 20$ .

10. — Les courbes  $C_o^{(9)}$  ont pour schéma

$$\begin{aligned} & (1, 3)^1, (1, 2)^2, (1, 1)^4, A^{24}, (2, 1)^5, (2, 2)^2, \\ & (1, 3, 1)^1, \quad (1, 1, 1)^2, \quad (2, 1, 1)^1, (2, 2, 1)^2. \\ & \quad (1, 1, 2)^2, \\ & (1, 1, 3, 1)^1, (1, 1, 3)^1, \\ & \quad (2, 1, 10)^1. \end{aligned}$$

On en conclut que les courbes  $\Gamma_o^{(9)}$ , sur la surface  $\Phi_5$ , ont un point double en  $A'_1$ , une des tangentes étant variable et l'autre étant tangente à la courbe  $\tau_2$ . Le système  $|\Gamma_o^{(9)}|$  a le degré  $n - 21$ .

Sur la surface  $\Phi_9$ , d'ordre  $n - 21$ , la courbe  $\tau_1$  est représentée par une droite et la courbe  $\tau_2$  par une conique. Au domaine du point  $(1, 1, 3, 1)$  correspond une droite exceptionnelle  $\rho_1$  rencontrant la droite  $\tau_1$  et au domaine du point  $(2, 1, 10)$ , une droite  $\rho_2$  rencontrant la conique  $\tau_2$ .

11. — Le schéma fixant le comportement des courbes  $C_o^{(10)}$  au point A est

$$\begin{aligned} & (1, 3)^1, (1, 2)^2, (1, 1)^3, A^{25}, (2, 1)^4, (2, 2)^2. \\ & (1, 3, 1)^1 \quad (1, 1, 1)^1, \quad (2, 2, 1)^2 \\ & \quad \cdot \\ & \quad \cdot \\ & (1, 1, 18)^1. \end{aligned}$$



14. — Les courbes  $C_o^{(13)}$  ont pour schéma

$$\begin{array}{l}
 (1, 1)^3, A^{28}, (2, 1)^2, (2, 2)^1, \\
 (1, 1, 1)^3, (2, 2, 1)^1. \\
 (1, 1, 2)^3, \\
 (1, 1, 3, 1)^1, (1, 1, 3)^2, \\
 (1, 1, 4)^1, \\
 \vdots \\
 (1, 1, 18)^1
 \end{array}$$

Observons que sur la surface  $\Phi_{12}$ , d'ordre  $n - 26$ , la courbe exceptionnelle  $\rho_1$  est une conique, la courbe exceptionnelle  $\rho_2$  une droite, la courbe  $\tau_2$  une droite s'appuyant sur  $\rho_2$ . Quant à la courbe  $\tau_1$ , elle se réduit à un point de  $\rho_1$ , singulier pour la surface. Sur  $\Phi_{12}$ , les courbes  $\Gamma_o^{(13)}$  sont découpées par les hyperplans passant par le point commun aux courbes exceptionnelles  $\rho_1, \rho_2$ . Le système  $|\Gamma_o^{(13)}|$  ayant le degré  $n - 27$ , ce point est simple pour la surface.

Sur la surface  $\Phi_5$ , les courbes  $\Gamma_o^{(13)}$  ont un point triple en  $A'_1$ , une des tangentes étant variable et les deux autres étant confondues avec la tangente en ce point à la courbe  $\tau_2$ .

15. — Le schéma des courbes  $C_o^{(14)}$  est

$$\begin{array}{l}
 (1, 1)^2, A^{29}, (2, 1)^2, \\
 (1, 1, 1)^2, (2, 1, 1)^2, \\
 (1, 1, 2)^2, \quad \vdots \\
 (1, 1, 3, 1)^1, (1, 1, 3)^1, (2, 1, 10)^2.
 \end{array}$$

Sur la surface  $\Phi_{12}$ , les courbes  $\Gamma_o^{(14)}$  sont découpées par les hyperplans passant par la droite exceptionnelle  $\rho_2$ , qu'elles coupent en deux points.

Sur la surface  $\Phi_5$ , les courbes  $\Gamma_o^{(14)}$  ont un point triple en  $A'_1$  et un point double infiniment voisin en  $A'_2$ , sur la courbe  $\tau_2$ . Une des tangentes à ces courbes en  $A'_1$  est variable.

Le système  $|\Gamma_o^{(14)}|$  a le degré  $n - 29$ .

16. — Les courbes  $C_o^{(15)}$  ont le schéma

$$\begin{array}{ll} (1, 1, 1)^1, & A^{30}, (2, 1)^1, \\ (1, 1, 1)^1, & (2, 1, 1)^1, \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ (1, 1, 18)^1. & (2, 1, 10)^1. \end{array}$$

Sur la surface  $\Phi_5$ , les courbes  $\Gamma_o^{(15)}$  ont un point triple en  $A'_1$ , un point double infiniment voisin en  $A'_2$ , les trois tangentes étant confondues.

Le système  $|\Gamma_o^{(15)}|$  a le degré  $n - 30$ . La surface  $\Phi_{15}$  contient deux droites exceptionnelles : la droite  $\rho_2$ , qui représente le domaine du point  $(2, 1, 10)$  et une droite  $\rho'_1$ , qui représente le domaine du point  $(1, 1, 18)$ .

Observons que sur la surface  $\Phi_{14}$ , la courbe exceptionnelle  $\rho_2$  est une conique et la courbe exceptionnelle  $\rho_1$  une droite. Ces deux courbes se rencontrent en un point, simple pour la surface, par lequel passent les hyperplans découpant les courbes  $\Gamma_o^{(15)}$ .

17. — Les courbes  $C_o^{(15)}$  assujetties à toucher en  $A$  une droite distincte des droites  $\alpha_1, \alpha_2$ , acquièrent en  $A$  la multiplicité 31 et ont en ce point 31 tangentes variables. Nous les désignerons par  $C_o^{(16)}$ . Il leur correspond sur  $\Phi_{15}$  les sections de cette surface par les hyperplans passant par un point simple, commun aux droites exceptionnelles  $\rho'_1, \rho_2$ .

Appelons  $\Gamma_o^{(16)}$  les courbes qui correspondent sur  $\Phi$  aux courbes  $C_o^{(16)}$ . En rapportant projectivement ces dernières aux hyperplans d'un espace linéaire à  $r_o - 16$  dimensions, on obtient une surface  $\Phi_{16}$ , d'ordre  $n - 31$ , projectivement identique à la projection de  $\Phi_{15}$ , à partir du point commun aux droites  $\rho'_1, \rho_2$ , sur un hyperplan de l'espace ambiant. Au domaine du point  $A$  correspond sur  $\Phi_{16}$  une droite exceptionnelle  $\rho_o$ . Sur cette droite, il existe deux points, projections des droites  $\rho'_1, \rho_2$ . Ces points sont singuliers pour la surface; l'un représente l'ensemble des courbes  $\sigma_1, \tau_1$ , l'autre l'ensemble des courbes  $\tau_2, \sigma_2$ .

18. — Le point de diramation  $A'$  est donc équivalent, comme nous l'avons vu, à l'ensemble de quatre courbes rationnelles

$$\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2,$$

de degrés virtuels respectifs  $-2, -3, -4, -2$ .

Appelons  $K'$  les courbes canoniques, supposées existantes, de la surface  $\Phi$  et proposons-nous de rechercher les points de rencontre des courbes  $K'$  avec les courbes précédentes.

Considérons, sur  $\Phi$ , une courbe  $\gamma$ , rationnelle, de degré  $-c$ . Il est toujours possible de trouver sur  $\Phi$  un système linéaire  $|D|$ , de degré  $m$  et de genre  $p$ , tel que le système  $|D + \gamma|$  n'ait pas  $\gamma$  comme composante fixe. Les courbes  $K'$  rencontrent les courbes  $D$  en  $2p - 2 - m$  points. Si  $\mu$  est le nombre des points d'intersection (supposés tous variables) des courbes  $D$  avec  $\gamma$ , le système  $|D + \gamma|$  a le degré  $m + 2\mu - c$  et le genre  $p + \mu - 1$ . Les courbes  $K'$  rencontrent les courbes  $D + \gamma$  en  $2p - m + c - 4$  points et par conséquent la courbe  $\gamma$  en  $c - 2$  points.

Cela étant, on peut trouver un système linéaire  $|D|$  tel que si  $\gamma$  est une des courbes  $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ , le système  $|D + \gamma|$  ne contient pas nécessairement les autres courbes. Il en résulte que les courbes  $K'$  ne rencontrent pas les courbes  $\sigma_1, \sigma_2$  mais rencontrent  $\tau_1$  en un point et  $\tau_2$  en deux points.

Aux courbes  $K'$  correspondent sur  $F$  des courbes  $K$  qui appartiennent au système canonique de cette surface et dont le comportement en  $A$  est fixé par le schéma

$$(1, 3)^1, (1, 2)^2, (1, 1)^2, A^6, (2, 1, 1)^4, (2, 2)^2, \\ (1, 3, 1)^1, \quad (2, 2, 1)^2.$$

La présence du point  $A$  abaisse donc le degré du système transformé du système canonique de  $\Phi$  de 70 unités <sup>(1)</sup>.

19. — Supposons que l'involution d'ordre 31, appartenant à la surface  $F$ , ne possède que des points unis de l'espèce qui vient

<sup>(1)</sup> Les courbes  $K$ , transformées des courbes canoniques de  $\Phi$ , doivent passer par d'autres points unis de l'involution, de sorte que le nombre des intersections absorbées en  $A$  pour deux courbes  $K$  n'est pas nécessairement multiple de 31.

d'être étudiée. Soit  $\chi$  le nombre de ces points. Nous allons rechercher les relations entre les genres arithmétiques  $p_a$  de  $F$  et  $\pi_a$  de  $\Phi$ , et les genres linéaires  $p^{(1)}$  de  $F$  et  $\pi^{(1)}$  de  $\Phi$ .

D'après ce que nous venons de voir, le degré du système transformé du système canonique de  $\Phi$  est  $p^{(1)} - 1 - 70\chi$ . On a donc

$$p^{(1)} - 1 = 31 (\pi^{(1)} - 1) + 70\chi. \quad (1)$$

Considérons maintenant un faisceau de sections hyperplanes de  $\Phi$  et soit  $\delta$  la classe de cette surface. Une courbe de ce faisceau passant par le point  $A'$  contient les courbes  $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$  et possède donc huit points doubles. Par conséquent, l'invariant de Zeuthen-Segre  $I'$  de  $\Phi$  a pour valeur

$$I' = \delta + 8\chi - n - 4\pi.$$

Le faisceau de courbes  $C_o$  qui correspond sur  $F$  au faisceau de courbes  $\Gamma_o$  considéré, possède  $\delta$  courbes ayant chacune 31 points doubles et  $\chi$  courbes passant par les points unis. Comme nous l'établirons dans un instant (n° 20), une telle courbe équivaut à 39 courbes du faisceau ayant un point double. L'invariant  $I$  de Zeuthen-Segre de la surface  $F$  a donc pour valeur

$$I = 31\delta + 39\chi - 31n - 4(31\pi - 30).$$

On en déduit

$$I = 31 I' - 209\chi + 120. \quad (2)$$

Additionnons les égalités (1) et (2) membre à membre en tenant compte de la relation de Noether,

$$p^{(1)} + I = 12p_a + 9.$$

Nous obtenons

$$12(p_a + 1) = 12 \times 31(\pi_a + 1) - 139\chi.$$

**20.** — Nous allons maintenant établir qu'une courbe  $C_o$  passant par un point uni  $A$  équivaut à 39 courbes ayant un point double.

Changeons de notations et reprenons le raisonnement de C. Segre <sup>(1)</sup>.

Soient  $|C|, |D|$  deux faisceaux de courbes tracés sur  $F$ ; désignons par  $\pi$  le genre des courbes  $C$  et par  $\mu$  le nombre des points de rencontre de deux courbes  $C, D$ . Segre introduit la courbe  $T$  lieu des points de contact des courbes  $C, D$ . Les courbes  $D$  découpent sur une courbe  $C$  une série  $g_{\mu}^1$ , possédant  $2(\mu + \pi + 1)$  points doubles, donc  $T$  coupe la courbe  $C$  en autant de points.

Supposons qu'une courbe  $C$ , soit  $C_1$ , possède un point  $A$  en lequel elle possède la même singularité que les courbes  $C_0$  au point uni. La courbe  $C_1$  est de genre  $\pi - 49$ . La série découpée par les courbes  $D$  sur  $C_1$  possède actuellement

$$2(\mu + \pi - 1) - 98$$

points doubles. Donc le point absorbe 98 points d'intersection de  $T$  et de  $C_1$ . On en conclut que le comportement de  $T$  au point  $A$  a pour schéma

$$(1, 3)^1, (1, 2)^2, (1, 1)^2 A^7, (2, 1)^4, (2, 2)^2, \\ (2, 2, 1)^1.$$

Par suite, la courbe  $C_1$  est équivalente à 39 courbes  $C$  ayant un point double. Le nombre des intersections de  $C_1$  et de  $T$  absorbés en  $A$  est du reste bien 98.

**21.** — Il nous reste à prouver qu'il existe des surfaces  $F$  possédant des involutions cycliques du type considéré. Il suffit de reprendre la méthode que nous avons indiquée récemment <sup>(2)</sup>

(1) C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche* (Atti Accad. Torino, 1895, vol. 31).

(2) *Sur la construction de modèles de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1948, pp. 56-61).

Plaçons-nous dans un espace linéaire  $S_{19}$  à 19 dimensions et considérons la surface  $F$  d'équations

$$\begin{aligned} x_{18}^\lambda x_{19}^\mu &= \varphi_{\lambda+\mu}(x_0, x_1, \dots, x_{17}), \\ x_{18}^{31} &= \varphi_{31}(x_0, x_1, \dots, x_{17}), \\ x_{19}^{31} &= \psi_{31}(x_0, x_1, \dots, x_{17}). \end{aligned}$$

où on donne successivement à  $\lambda, \mu$  les valeurs  $\lambda_i, \mu_i$  indiquées au début (n° 1) et où les  $\varphi, \psi$ , sont des formes dont le degré est indiqué par l'indice.

L'homographe

$$x'_0 : x'_1 : \dots : x'_{17} : x'_{18} : x'_{19} = x_0 : x_1 : \dots : x_{17} : \varepsilon x_{18} : \varepsilon^{18} x_{19},$$

où  $\varepsilon$  est une racine primitive d'ordre 31 de l'unité, engendre sur  $F$  une involution d'ordre 31 possédant comme points unis les points de rencontre de la surface avec l'espace  $x_{18} = x_{19} = 0$ . Ces points unis sont de l'espèce étudiée dans cette note.

Liège, le 30 janvier 1950.