Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du samedi 10 avril 1948.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une involution cyclique du onzième ordre appartenant à une surface algébrique,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans nos *Recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (1), nous avons été conduit à l'étude de certains points unis d'une involution du onzième ordre, appartenant à une surface algébrique. En l'espèce, la surface était un plan et l'involution était engendrée par une homographie cyclique non homologique, de période onze, de ce plan. En utilisant les résultats que nous avons obtenus récemment dans l'étude de la structure des points unis des involutions appartenant à une surface algébrique (2), nous reprenons nos recherches rappelées, en supposant cette fois que l'involution du onzième ordre appartient à une surface algébrique sur laquelle nous ne faisons aucune hypothèse. La méthode utilisée est plus générale que celle que nous avons employée dans notre première note et peut d'ailleurs s'appliquer à l'étude d'un point uni isolé d'une involution cyclique quelconque. Nous avons aussi fait usage d'une méthode utilisée autrefois (3) pour la déter-

(1) Troisième communication (Bulletin de l'Académie royale de Belgique 1931, pp. 1356-1364).

(2) *Recherches sur les points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Académei royale de Belgique, 1948, pp. 206-228). Nous utilisons également, dans cette note, des résultats que l'on trouvera dans notre exposé sur *Les Involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient. et industr., nº 270 ; Paris, Hermann, 1935).

(3) *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1940, pp. 54-79, 128-137).

mination des branches superlinéaires des courbes appartenant à l'involution, passant par le point uni considéré et ayant ce point pour origine. Nous déduisons de notre recherche la structure du point de diramation correspondant sur une surface normale, image de l'involution.

En terminant, nous construisons une surface contenant une involution d'ordre onze, présentant des points unis de l'espèce considérée.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_{11}, d'ordre onze, ne présentant qu'un nombre fini de points unis. Nous avons montré que l'on peut prendre, pour modèle projectif de la surface F, une surface normale, appartenant à un espace S_r de dimension r aussi grande que l'on veut, sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H, de période 11, possédant 11 axes ponctuels dont un seul rencontre la surface (aux points unis de l'involution).

Désignons par S_0, S_1, ..., S_{10} les axes ponctuels de l'homographie H et supposons que ce soit le premier, S_0, qui rencontre F. Soit r_0 sa dimension.

Soit $|C|$ le système des sections hyperplanes de F. Ce système contient 11 systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$,..., $|C_{10}|$ appartenant à l'involution I_{11}. Chacun de ces systèmes est découpé par un système d'hyperplans unis de H ; nous supposerons que le système $|C_i|$ est découpé par les hyperplans passant par S_0, S_1,..., S_{i-1}, S_{i+1},..., S_{10}. Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base ; les autres ont pour points-base les points unis de I_{11}.

En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions, on fait correspondre à F une surface Φ, image de l'involution I_{11}. Si n est l'ordre de cette surface et π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0, l'ordre de F est $11n$ et le genre des courbes C est $11\pi - 10$.

A chacun des axes de l'homographie H, nous attachons une racine onzième de l'unité. Si ϵ est une racine onzième primitive de l'unité, nous pouvons numéroter les axes de manière que les racines attachées à S_0, $S_1, \ldots$, S_{10} soient $1, \epsilon, \ldots, \epsilon^{10}$.

Soit A un point uni de l'involution I_{11}. Supposons que le plan tangent à F en ce point, plan qui est uni pour H, s'appuie en un point sur S_1 et en un point sur l'espace S_3. Désignons par a_1 la tangente à F en A qui s'appuie sur S_1, par a_3 celle qui s'appuie sur S_3. Le point A est uni non parfait pour I_{11} ; nous allons étudier sa structure et celle du point de diramation A_0 correspondant sur Φ.

Les courbes C_1 ont un point simple en A et y touchent la droite a_3 ; les courbes C_3 ont un point simple en A et y touchent la droite a_1.

2. Désignons par C_0' les courbes C_0 passant par A ; elles y ont un point double au moins, les tangentes étant a_1, a_3. Désignons par C_0'' les courbes C_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de a_1, a_3, et ainsi de suite.

Comme nous l'avons montré, les courbes C_0', C_0'', ..., se comportent en A comme les courbes

$$\lambda C_1 + \mu C_3,$$

où λ et μ sont des entiers positifs ou nuls tels que

$$\lambda + \mu \leqslant 11, \qquad \lambda + 3\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 11).$$

Nous représenterons cette courbe par la notation (λ, μ) ; elle a en A μ tangentes confondues avec a_1 et λ avec a_3.

Un calcul simple montre que l'on a les systèmes suivants :

$$C_0' : (2,\ 3)\ ;\ C_0'' : (5,\ 2)\ ;\ C_0''' : (1,7)\ ;$$
$$C_0^{(4)} : (8,1)\ ;\ C_0^{(5)} : (4,6).$$

Le système $|C_0^{(6)}|$ est formé de courbes ayant en A la multiplicité 11, avec des tangentes variables.

Rappelons que chacune des courbes C_0', C_0'', ... est rencontrée en p points confondus en A par chacune des courbes C_1, C_3.

3. Les courbes C_0' ont en A un point quintuple, trois tangentes coïncidant avec a_1 et deux avec a_3.

Les courbes C_0' et C_1 ont en commun un certain nombre de points B_1, B_2, ... infiniment voisins successifs de A. Ces points sont au plus doubles pour les courbes C_0'. Si deux points consécutifs, B_i, B_{i+1}, étaient le premier double, le second simple pour les courbes C_0', celles-ci devraient avoir en commun au moins un point simple infiniment voisin de B_{i+1} et distinct de B_{i+2}. De plus, ce dernier point ne pourrait appartenir aux courbes C_1. Cela est impossible, car la somme des multiplicités des points B_1, B_2,... pour les courbes C_0' doit être égale à six. Par conséquent, les courbes C_1 et C_0' ont en commun trois points B_1, B_2, B_3 infiniment voisins successifs de A, doubles pour ces dernières courbes.

Les courbes C_0' et C_3 ont en commun un certain nombre de points A_1, A_2... infiniment voisins successifs de A, en plus triples pour les courbes C_0'. Ou bien il y a deux points triples A_1, A_2, ou bien il y a un point triple A_1, un point double A_2, un point simple A_3 et de plus, un point simple distinct de A_3, infiniment voisin de A_2 et qui n'appartient pas aux courbes C_3. Mais dans ce dernier cas, le point A absorbe 52 points d'intersection de deux courbes C_0' ; or le système $|C_0'|$ appartient à l'involution I_{11} et ce nombre doit être multiple de 11. On en conclut que les courbes C_3, C_0' ont en commun deux points A_1, A_2 infiniment voisins successifs de A, triples pour les courbes C_0'.

Les points A_1, B_1, B_2 sont unis non parfaits et les points A_2, B_3 sont unis parfaits pour I_{11}.

Le système $|C'_0|$ a la dimension $r_0 - 1$; en rapportant projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - 1$ dimensions, on obtient une surface Φ_1, projectivement identique à la projection de Φ à partir de A_0 sur un hyperplan. Aux domaines des points A_2, B_3 correspondent respectivement sur Φ_1 une cubique α_3 et une conique β_2. Le point A_0 est quintuple pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en un cône cubique et un cône quadratique.

Les sections hyperplanes Γ'_0 de Φ_1 sont de genre $\pi - 4$ et la surface est d'ordre $n - 5$. La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance entre une courbe Γ'_0 et une courbe C'_0 homologues, donne une vérification.

4. Les courbes C'_0 ont en A un point multiple d'ordre 7, deux tangentes coïncident avec a_1 et cinq avec a_3.

Aux courbes C''_0 correspondent sur Φ_1 des courbes Γ''_0 découpées par les hyperplans passant par un point A'_0 de cette surface.

Si le point A'_0 n'appartenait pas à la courbe α_3, le point A_2 serait triple pour les courbes C''_0, ce qui est impossible. Il en résulte que les points A_1, A_2 sont doubles pour les courbes C''_0 et que A'_0 appartient à α_3.

Si le point A'_0 n'appartenait pas à la courbe β_2, le point B_3 serait double pour les courbes C''_0 ; il en serait de même des points B_2, B_1 et les courbes C_3 rencontreraient les courbes C''_0 en 13 points confondus en A, ce qui est impossible. Donc A'_0 appartient à β_2 et le point B_3 est simple pour les courbes C''_0. Le point B_2 est nécessairement simple et le point B_1 double pour les courbes C''_0. Comme celles-ci ont cinq tangentes confondues avec a_3, il faut que les courbes C''_0 aient encore en commun trois points simples B_{11}, B_{12}, B_{13} infiniment voisins successifs de B_1.

Rapportons projectivement les courbes C''_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - 2$ dimensions ; nous obtenons une surface Φ_2 projectivement identique à la projection de Φ_1 à partir de A_0'. Cette surface Φ_2 est d'ordre $n - 6$ et ses sections hyperplanes Γ_0'' sont de genre $\pi - 4$. Le point A_0' est simple pour la surface Φ_1.

Sur la surface Φ_2 correspond à α_3 une conique que nous désignerons toujours par α_3, à β_2 une droite β_2 et au domaine du point B_{13} une droite (exceptionnelle) β_1, rencontrant la conique α_3 et la droite β_2 chacune en un point.

5. Les courbes C_0''' ont la multiplicité huit en A, sept tangentes coïncident avec a_1 et une avec a_3. Soient Γ_0''' les courbes qui leur correspondent sur Φ_2 ; ces courbes sont découpées par les hyperplans passant par un point A_0''.

Les courbes C_0''' passent nécessairement une fois par les points B_1, B_2, B_3. Les courbes Γ_0''' rencontrent en un point la droite β_2, donc A_0'' ne se trouve pas sur cette droite. Par contre, les courbes C_0''' ne passant pas par B_{13}, le point A_0' se trouve sur β_1.

La somme des multiplicités des courbes C_0''' en A_1, A_2 étant égale à trois, et les courbes L_0''' rencontrant la conique α_3 en un point au moins, le point A_2 est simple, le point A_1 double par les courbes C_0''' et le point A_0' est situé sur α_3. Comme il y a sept tangentes à ces courbes confondues avec a_1, elles doivent passer simplement par cinq points A_{11}, $A_{12}, \ldots$, A_{15} infiniment voisins successifs de A_1.

Rapportons projectivement les courbes C_0''' aux hyperplans d'un espace à $r_0 - 3$ dimensions ; nous obtenons une surface Φ_3 projectivement identique à la projection de la surface Φ_2 à partir de A_0''. La surface Φ_3 est d'ordre $n - 7$ et ses sections hyperplanes Γ_0''' sont de genre $\pi - 4$. Le point A_0'' est simple pour la surface Φ_2.

Sur la surface Φ_3, à la conique α_3 correspond une droite α_3, à la droite β_2 une droite β_2, à la droite β_1 un point β_1

appartenant à la droite β_2. Au domaine du point A_{15} correspond une droite α_1.

6. Les courbes $C_0^{(4)}$ ont la multiplicité 9 en A, une tangente coïncide avec a_1 et huit avec a_3. Les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ qui leur correspondent sur Φ_3 sont découpées par les hyperplans passant par un point A_0'''.

Les courbes $C_0^{(4)}$ passent nécessairement une fois par chacun des points A_1, A_2, par conséquent le point A_0''' n'appartient pas à α_3. Comme les courbes $C_0^{(4)}$ ne passent pas par A_{15}, le point A_0'' appartient à la droite α_1.

Les courbes $C_0^{(4)}$ ne peuvent passer par B_3, car la somme de leurs multiplicités en B_1, B_2, B_3 est égale à deux. Elles ne peuvent non plus passer par B_2, qui n'est pas uni parfait. Elles passent donc deux fois par B_1 et deux fois par chacun des points B_{11}, B_{12}, B_{13}.

Soit Φ_4 une surface dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes $C_0^{(4)}$ et par conséquent projectivement identique à la projection de Φ_3 à partir de A_3'''. Cette surface Φ_4 est d'ordre $n - 9$, ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(4)}$ sont de genre $\pi - 5$ et le point A_0''' est double pour la surface Φ_3. Ce point coïncide avec le point β_1.

Sur la surface Φ_4 se trouvent une droite α_3, une conique β_1, homologue du domaine du point B_{13} et, sur β_1, deux points qui représentent α_1 et β_2.

7. Les courbes $C_0^{(5)}$ ont la multiplicité dix en A, six tangentes coïncident avec a_1 et quatre avec a_3. Les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ qui leur correspondent sur Φ_4 sont découpées par les hyperplans passant par un point $A_0^{(4)}$.

Les courbes en question passent simplement par A_1 et par les points A_{11}, $A_{12}, \dots$, A_{15} et simplement par les points B_1, B_{11}, B_{12}, B_{13}.

La surface Φ_5 dont les sections hyperplanes correspondent projectivement aux courbes $C_0^{(5)}$ est d'ordre

$n - 10$ et ses sections hyperplanes sont de genre $\pi - 5$. Elle est projectivement identique à la projection Φ_4 à partir de $A_0^{(4)}$ et ce point est donc simple pour cette surface. Le point $A_0^{(4)}$ appartient aux courbes α_3, β_1.

Sur la surface Φ_5 se trouvent tracées deux droites β_1, α_1, qui représentent les domaines des points A_{15}, B_{13}. Le point $A_0^{(4)}$ coïncide avec le point α_1, qui se trouve donc sur α_3.

8. Dans l'étude de la structure du point de diramation A_0 de Φ, nous rencontrons donc quatre courbes rationnelles : α_3, β_2, β_1, α_1, mais seules les deux premières présentent de l'intérêt, car β_1 et α_1 sont des courbes exceptionnelles.

Le fait que le point A_0''' est double pour la surface Φ_3 et que la courbe β_1 est une conique sur la surface Φ_4 se justifie aisément. Aux courbes $\Gamma_0^{(4)}$, qui forment un système de dimension $r_0 - 4$, correspondent, sur la surface Φ_1 des sections hyperplanes ayant un point double en A_0', c'est-à-dire des courbes découpées par les hyperplanes contenant le plan tangent à Φ_1 en A_0'. Ce passage impose trois conditions aux hyperplans et on trouve donc bien sur Φ_1, ∞^{r_0-4} courbes Γ_0' ayant un point double en A_0', courbes qui correspondent aux courbes $\Gamma_0^{(4)}$.

Sur la surface Φ, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \alpha_3 + \beta_2.$$

On en conclut que la courbe α_3 est de degré -4 et la courbe β_2 de degré -3.

Il est facile d'établir les relations fonctionnelles liant les courbes Γ_1, Γ_3, homologues sur Φ des courbes C_1, C_3, aux courbes Γ_0. On a

$$11\,\Gamma_0 \equiv 11\,\Gamma_1 + \alpha_3 + 4\,\beta_2 + \Delta,$$
$$11\,\Gamma_0 \equiv 11\,\Gamma_3 + 3\,\alpha_3 + \beta_2 + \Delta',$$

$\varDelta$ et $\varDelta'$ provenant des autres points de diramation de la surface $\varPhi$.

9. Nous allons maintenant construire une surface contenant une involution présentant des points unis de l'espèce qui vient d'être étudiée.

Considérons, dans l'espace S_9, l'homographie H d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \dots = \frac{x'_7}{x_7} = \frac{x'_8}{\epsilon x_8} = \frac{x'_9}{\epsilon^3 x_9}.$$

Appelons O_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i. L'homographie H possède trois axes ponctuels : l'espace $O_0O_1 \dots O_7$ et les points O_8, O_9.

Considérons la surface F d'équations

$$\left.\begin{aligned} x_8^2x_9^3 = \phi_5,\ x_8^5x_9^2 = \phi_7,\ x_8^8x_9 = \phi_9,\ x_8x_9^7 = \phi_8, \\ x_8^4x_9^6 = \phi_{10},\ x_8^{11} = \phi_{11},\ x_9^{11} = \psi_{11}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

où $\phi_5, \phi_7, \dots, \phi_{11}, \psi_{11}$ sont des formes en $x_0, x_1, \dots, x_7$ dont les degrés sont indiqués par les indices.

La surface F est d'ordre $5.\ 7.\ 9.\ 8.\ 10.\ \overline{11}^2$ et l'homographie H, qui a la période 11, engendre sur cette surface une involution I_{11}, d'ordre 11. Les points unis de cette involution sont les points de rencontre de la surface avec l'espace $O_0O_1 \dots O_7$; leur nombre est donc égal à l'ordre de la surface.

Pour obtenir une surface image $\varPhi$ de l'involution I_{11}, il suffit de projeter la surface F sur l'espace $O_0O_1 \dots O_7$ à partir de la droite O_8O_9. On obtient ainsi une surface dont les équations peuvent s'écrire

$$\left.\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} \phi_5 & \phi_7 & \phi_9 & \phi_8 & \psi_{11} \\ \phi_7 & \phi_9 & \phi_{11} & \phi_{10} & \phi_5\phi_8 \end{matrix} \right\| = 0, \\ \phi_5 = \phi_{10}, \quad \phi_8 = \phi_5\,\psi_{11}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Pour étudier un point uni de l'involution I_{11} sur F, nous pouvons supposer que ce point coïncide avec O_0, ce qui revient à supposer que les hypersurfaces (1) passent toutes par O_0. Nous poserons

$$\phi_k = x_0^{k-1}\,\xi_k + \ldots,\ \psi_{11} = x_0^{10}\,\eta_{11} + \ldots,$$

où ξ_k, η_{11} sont des formes linéaires $x_1, x_2, \ldots, x_7$. Il suffira alors de rechercher le cône tangent en O_0 à la surface Φ, représentée par les équations (2).

L'hyperplan tangent en O_0 à l'hyperquadrique $\phi_5^2 - \phi_{10} = 0$ est donné par $\xi_{10} = 0$, et le cône tangent à Φ en O_0 est situé dans cet hyperplan.

L'hypersurface $\phi_5^2\,\phi_8 - \phi_7\,\psi_{11} = 0$ a un point double en O_0, le cône tangent en ce point se décomposant en deux hyperplans $\xi_7 = 0$, $\eta_{11} = 0$.

La variété à quatre dimensions

$$\left\| \begin{matrix} \phi_5 & \phi_7 & \phi_9 & \phi_8 \\ \phi_7 & \phi_9 & \phi_{11} & \phi_{10} \end{matrix} \right\| = 0$$

a pour cône tangent en O_0 le cône du quatrième ordre

$$\left\| \begin{matrix} \xi_5 & \xi_7 & \xi_9 & \xi_8 \\ \xi_7 & \xi_9 & \xi_{11} & \xi_{10} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Il en résulte que le cône tangent à Φ en O_0 se compose d'un cône cubique

$$\left\| \begin{matrix} \xi_5 & \xi_7 & \xi_9 \\ \xi_7 & \xi_9 & \xi_{11} \end{matrix} \right\| = 0,\ \xi_{10} = 0,\ \xi_8 = 0,\ \eta_{11} = 0$$

et d'un cône quadratique

$$\xi_8^2 - \xi_5\,\eta_{11} = 0,\ \xi_{10} = 0,\ \xi_7 = 0,\ \xi_9 = 0,\ \xi_{11} = 0,$$

car l'hypersurface $\phi_8^2 - \phi_5\,\psi_{11} = 0$ a un point double en O_0, le cône tangent étant

$$\xi_8^2 - \xi_5\,\eta_{11} = 0.$$

Le cône cubique et le cône quadratique ont en commun la droite

$$\xi_7 = 0, \ \xi_9 = 0, \ \xi_{11} = 0, \ \xi_8 = 0, \ \xi_{10} = 0, \ \eta_{11} = 0.$$

La surface Φ est d'ordre $n = 5.7.9.8.10.11$ et possède $11n$ points de diramation qui sont évidemment tous de même structure.

Liège, le 27 mars 1948.