

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Sur une surface de rang p n'ayant que des points
de diramation doubles biplanaires,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans nos recherches antérieures sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique ⁽¹⁾, nous avons rencontré des involutions d'ordre premier $p > 2$ ne présentant que des points unis symétriques. Une surface image d'une telle involution présente, aux points de diramation, des points doubles biplanaires. Dans cette note, nous étudions une telle involution et la surface image. Cet exemple est intéressant par le fait que nous pouvons former l'équation d'une famille de surfaces ayant un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface de rang p , image de l'involution.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions, la surface F d'équations

$$x_4^p = \phi_1(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad x_5^p = \phi_2(x_0, x_1, x_2, x_3), \\ x_4 x_5 = \phi(x_0, x_1, x_2, x_3),$$

où ϕ_1, ϕ_2 sont des formes de degré p et ϕ une forme quadratique, p étant un nombre premier impair.

⁽¹⁾ *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATH. DE FRANCE, 1919, pp. 1-16) ; *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient. et indust., n° 270 ; Paris, Hermann, 1935).

La surface F est transformée en elle-même par l'homographie cyclique T , de période p , d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{\epsilon x_4} = \frac{x'_5}{\epsilon^{p-1} x_5},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

L'homographie T engendre sur F une involution I_p , d'ordre p , dont nous désignerons par Φ une surface image.

Les axes ponctuels de l'homographie T sont l'espace S_3 ($x_4 = x_5 = 0$) et les points O_4 (0,0,0,0,1,0) et O_5 (0,0,0,0,0,1). Les points O_4 , O_5 n'appartiennent pas à F , mais l'espace S_3 coupe cette surface en $2p^2$ points qui sont les points unis de l'involution I_p .

La surface Φ s'obtient en rapportant projectivement les hyperplans de S_5 passant par O_4 , O_5 aux plans d'un espace ordinaire, ou, ce qui est la même chose, en projetant F de O_4 , O_5 sur l'espace S_3 . On obtient ainsi la surface

$$\phi_1 \phi_2 - \phi^p = 0,$$

d'ordre $2p$.

2. Pour étudier les points unis de I_p et les points de diramation de Φ , qui sont tous de même nature, nous supposons que O_0 (1, 0, 0, 0, 0, 0) est un de ces points. Nous poserons

$$\phi_1 \equiv x_0^{p-1} \alpha_1 + x_0^{p-2} \alpha_0 + \dots + \alpha_p,$$

$$\phi_2 \equiv x_0^{p-1} \beta_1 + x_0^{p-2} \beta_2 + \dots + \beta_p,$$

$$\phi \equiv x_0 \gamma_1 + \gamma_2,$$

où les α , β , γ sont des formes en x_1 , x_2 , x_3 dont les degrés sont indiqués par les indices.

Le plan tangent en O_0 à la surface F a pour équations

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0;$$

il passe par les points O_4, O_5 et dans ce plan, T détermine l'homographie

$$x_0 : x_4 : x_5 = x_0 : \epsilon x_4 : \epsilon^{p-1} x_5.$$

Il en résulte que le point O_0 est un point non symétrique de l'involution I_p . ⁽¹⁾

Sur la surface Φ , le point de diramation O_0 doit être un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\frac{1}{2}(p-2)$ points doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

L'équation de la surface Φ s'écrit

$$(x_0^{p-1} \alpha_1 + x_0^{p-2} \alpha_2 + \dots) (x_0^{p-1} \beta_1 + x_0^{p-2} \beta_2 + \dots) - (x_0 \gamma_1 + \gamma_2)^p = 0.$$

Le point O_0 est bien double biplanaire, les plans tangents en ce point étant $\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0$.

Pour étudier la singularité au point O_0 , passons aux coordonnées non homogènes en posant

$$x_0 = 1, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z$$

et supposons, ce qui ne restreint pas la généralité,

$$\alpha_1 \equiv x, \quad \beta_1 \equiv y.$$

Effectuons la transformation

$$x = x'z', \quad y = y'z', \quad z = z'. \quad (1)$$

Nous obtenons, après suppression du facteur z^2 et des accents,

$$(x + z\alpha_2 + \dots) (y + z\beta_2 + \dots) - z^{p-2}(\gamma_1 + z\gamma_2)^p = 0,$$

⁽¹⁾ Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies (MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE, 1930, 1931); Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (RIVISTA DE L'UNIVERSITAD DE TUCUMAN, 1910).

où l'on a

$$\begin{aligned} \alpha_2 &\equiv \alpha_2(x, y, 1), \quad \beta_2 \equiv \beta_2(x, y, 1), \quad \gamma_1 \equiv \gamma_1(x, y, 1), \\ \gamma_2 &\equiv \gamma_2(x, y, 1). \end{aligned}$$

Cette surface possède à l'origine un point double biplanaire, les plans tangents étant

$$x - z\alpha_2(0, 0, 1) = 0, \quad y - z\beta_2(0, 0, 1) = 0.$$

Effectuons un changement de coordonnées de manière à prendre ces plans pour nouveaux plans $x = 0, y = 0$. L'équation de la surface s'écrira sous la forme

$$\begin{aligned} (x + \alpha'_2(x, y, z) + \dots)(y + \beta'_2(x, y, z) + \dots) \\ - z^{p-2}(\gamma'_0 + \gamma'_1 + \gamma'_2)^p = 0. \end{aligned}$$

En opérant sur cette surface la transformation (1), on trouvera de nouveau une surface ayant à l'origine un point double biplanaire, et ainsi de suite. Le procédé s'arrêtera après $\frac{1}{2}(p-1)$ opérations. On obtiendra alors une surface d'équation

$$(x + z\bar{\alpha}_2 + \dots)(y + z\bar{\beta}_2 + \dots) - z(\bar{\gamma}_0 + \bar{\gamma}_1 + \bar{\gamma}_2)^p = 0,$$

ayant un point simple à l'origine.

Conformément à la théorie, la surface Φ a donc au point O_0 une suite de $\frac{1}{2}(p-1)$ points doubles biplanaires infiniment voisins successifs, dont le dernier est ordinaire.

3. Désignons par $|C|$ le système des sections hyperplanes de F . Ce système contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p .

Le premier, $|C_1|$, est découpé par les hyperplans passant par O_4, O_5 . Il a pour homologue sur Φ le système des sections planes $|\Gamma_1|$ de cette surface.

Le second, $|C_2|$, se compose d'une seule courbe, décou-

pée par l'hyperplan $x_4 = 0$. Cette courbe a pour homologue, sur Φ , la courbe Γ_2 , d'équations

$$\phi_1 = 0, \quad \phi = 0,$$

le long de laquelle, conformément à la théorie, la surface $\phi_1 = 0$ a un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface Φ . Cette courbe passe par les points de diramation

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0, \quad \phi = 0.$$

Le troisième système, $|C_3|$, est également composé d'une seule courbe, découpée par l'hyperplan $x_5 = 0$. A cette courbe correspond sur Φ la courbe Γ_3 , d'équations

$$\phi_2 = 0, \quad \phi = 0,$$

le long de laquelle la surface $\phi_2 = 0$ a un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface Φ . La courbe Γ_3 passe par les $2p^2$ points de diramation de la surface Φ .

4. Considérons maintenant le système linéaire découpé sur F par les hypersurfaces

$$\left. \begin{aligned} & yx_4^{p-1} + x_4^{p-1}x_5^p\psi_1 + x_4^{p-2}x_5^{p-1}\psi_3 + \dots \\ & + x_4^{p-k}x_5^{p-k+1}\psi_{2k-1} + \dots + x_5^p\psi_{p-1} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

où l'on a posé $p = 2\nu + 1$ et où les ψ sont des formes à coefficients variables en x_0, x_1, x_2, x_3 , dont les degrés sont indiqués par les indices.

Ce système linéaire, que nous désignerons par $|D|$, est transformé en lui-même par l'homographie T et il lui correspond, sur Φ , un système linéaire complet $|\Delta|$.

En multipliant les deux membres de l'équation (1) par x_4 , on voit qu'une courbe Δ est découpée, sur Φ , en dehors de la courbe Γ_2 , par la surface

$$\left. \begin{aligned} & y\phi_1 + \phi^p\psi_1 + \phi^{p-1}\psi_3 + \dots + \phi^{p-k+1}\psi_{2k-1} \\ & + \dots + \phi\psi_{p-2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Élevons les deux membres de l'équation (1) à la

puissance p . En tenant compte des équations de F , on a

$$\left. \begin{aligned} & \lambda^p \phi_1^{(p-1)} + \lambda^{p-1} \binom{p}{1} \phi_1^{p-2} \Psi + \dots + \lambda^i \binom{p}{i} \phi_1^{i-1} \Psi^{p-i} + \dots \\ & + \lambda \binom{p}{1} \Psi^{p-1} + \phi_1^{p-1} \phi_2^p \psi_1^p + \binom{p}{1} \phi_1^{p-2} \phi_2^{p-1} \phi_2^p \psi_1^{p-1} \psi_3 \\ & + \dots + \phi_2 \psi_{p-2}^p = 0, \end{aligned} \right\} (3)$$

où l'on a posé

$$\Phi = \phi^p \psi_1 + \dots + \phi^{p-k+1} \psi_{2k-1} + \dots + \phi \phi_{p-2}.$$

D'après la théorie, la surface (3) doit avoir un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface Φ le long de la courbe Δ .

Supposons que, dans l'équation (3), λ varie et cherchons l'enveloppe de la famille de surfaces ainsi obtenue.

La dérivée par rapport à λ de l'équation (3) est

$$p[\lambda \phi_1 + \Psi]^{p-1} = 0.$$

Par conséquent, la racine λ donnée par l'équation (2) est multiple d'ordre p pour l'équation (2), lorsque cette valeur de λ satisfait à cette équation, c'est-à-dire lorsque l'on a

$$\begin{aligned} & \Psi^p - \phi_1^p \phi_2^p \psi_1^p - \binom{p}{1} \phi_1^{p-1} \phi_2^{p-1} \phi_2^p \psi_1^{p-1} \psi_3 + \dots \\ & - \phi_1 \phi_2 \psi_{p-2}^p = 0. \end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation est divisible par $\phi^p - \phi_1 \phi_2$, donc la surface (3) a bien un contact d'ordre $p - 1$ avec la surface Φ le long d'une courbe Δ .

5. La surface Φ , d'ordre $2p$, possède comme seules singularités les $2p^2$ points doubles de diramation, par conséquent le système canonique de Φ est découpé sur cette surface par les surfaces d'ordre $2p - 4$. On a donc

$$p'_a = p'_o = \binom{2p-1}{3}, \quad p'^{(1)} = 2p^2(2p - 4)^2 + 1.$$

Les genres de F sont donnés par

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) - 2p^2(p^2 - 1),$$
$$p^{(1)} - 1 = p(p'^{(1)} - 1).$$

On a donc

$$p_a = \frac{1}{6}(p - 1)(7p^3 - 17p^2 + 6p + 6),$$
$$p^{(1)} = 2p^3(2p - 4)^2 + 1$$

Liège, le 26 janvier 1948.