Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 4 janvier 1947.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Recherches sur la construction de surfaces algébriques irrégulières,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(*Première note*).

Considérons une courbe algébrique L contenant une involution cyclique d'ordre p et soit F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. Nous pouvons définir sur la surface F deux involutions. Si P est un point de F et P_1, P_2 les points de la courbe L que P représente, la transformation birationnelle τ de L en soi génératrice de l'involution d'ordre p fait correspondre à P_1, P_2 des points P'_1, P'_2. Le point P′ de F représentant le couple P'_1 P'_2 correspond à P dans une certaine transformation birationnelle de période p de F en soi. La transformation T engendre une involution I_p d'ordre p. D'un autre côté, les points de F qui représentent les couples de points de L formés d'un point du groupe de l'involution déterminé par P_1 et d'un point du groupe de l'involution déterminé par P_2, forment un groupe de p^2 points qui, lorsque P décrit F, engendre une involution d'ordre p^2, représentée par une surface Φ. Si L′ est la courbe image de l'involution engendrée par τ sur L, la surface Φ représente les couples de points de la courbe L′. Les groupes de l'involution d'ordre p^2 sur F sont formés de p groupes de I_p et par conséquent, une surface F′, image de l'involution I_p, contient à son tour une involution d'ordre p dont Φ est l'image.

Supposons $p > 2$ et la courbe L′ de genre supérieur à 0. Alors, la courbe L est également de genre supérieur à 0, les surfaces F et Φ sont irrégulières et l'involution I_p ne possède qu'un nombre fini de points unis. La surface F' est irrégulière et on a ainsi une méthode de construction de surfaces irrégulières. Nous avons déjà appliqué ce procédé dans le cas où l'involution I_p est dépourvue de points unis ([1]). Nous avons aussi appliqué la méthode à différents cas particuliers où il se présente des points unis ([2]). Dans cette note, nous nous proposons d'étudier le cas $p = 3$. La difficulté qui se présente lorsque p est quelconque est la détermination de la structure des points unis de l'involution I_p ([3]). Lorsque $p = 3$, cette structure est bien connue et nous avons pu mener notre recherche à bout. Si π' est le genre de la courbe L', nous démontrons que l'irrégularité de la surface F' est égale à π'. Dans une seconde note, nous considérerons un cas particulier.

1. Soit L une courbe algébrique non hyperelliptique de genre π ($\pi > 3$), contenant une involution cyclique i_3 d'ordre trois, engendrée par une transformation birationnelle τ de la courbe en soi. Nous désignerons par π' le genre de la courbe L' image de l'involution i_3. Si δ est le nombre de points unis de cette involution, nous avons, d'après la formule de Zeuthen,

$$3(\pi' - 1) + \delta = \pi - 1.$$

Nous prendrons comme modèle projectif de la courbe L la courbe canonique d'ordre $2\pi - 2$, de l'espace $S_{\pi-1}$. La transformation τ est alors une homographie cyclique

([1]) *Sur certaines surfaces algébriques irrégulières* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1933, pp. 674-680).

([2]) *Mémoire sur les surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois* (Archives de l'Institut de Sciences de Barcelone, 1917, pp. 89-107). Voir aussi différentes notes parues dans les Bulletins de l'Académie depuis 1943.

([3]) Voir au sujet de ces points unis notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface-algébrique.* (Paris, Hermann, 1935).

de période trois, possédant deux ou trois axes ponctuels. Nous ferons en premier lieu l'hypothèse que τ possède trois axes ponctuels.

D'après l'interprétation de la formule de Zeuthen due à M. Castelnuovo, le transformé d'un groupe canonique de L', augmenté du groupe des points unis de i_3 (actuellement, puisque i_3 est cyclique, le groupe des δ points unis doit être compté deux fois) donne un groupe canonique de L. Il en résulte que l'homographie τ possède un axe ponctuel σ, de dimension $\pi' - 1$, ne rencontrant pas la courbe L. Les deux autres axes, que nous désignerons par α, β, rencontrant L, le premier en δ_1 points, le second en $\delta_2 = \delta - \delta_1$ points unis.

Les hyperplans de $S_{\pi-1}$ passant par α, β, découpent sur L les transformés des groupes canoniques de L'. Si A est un des δ_1 points unis appartenant à α, les hyperplans passant par α et β doivent contenir la tangente à L en A. Celle-ci s'appuie donc en un point A' sur β. De même, la tangente à L en un point B de cette courbe appartenant à β doit s'appuyer en un point B' sur l'espace α.

2. Désignons par F la surface qui représente les couples de points de la courbe L. Cette surface a (Severi) les genres

$$p_a = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - \pi, \qquad p_g = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1),$$
$$p^{(1)} = (\pi - 2)(4\pi - 5).$$

Les courbes canoniques C de F correspondent aux couples de points de L déterminant des cordes appartenant à des complexes linéaires de droites de $S_{\pi-1}$. Nous prendrons comme modèle projectif de F la surface, construite par M. Severi, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques. Elle appartient à un espace linéaire S_R à $R = p_g - 1$ dimensions.

Soient P un point de F et P_1, P_2 les points de L que P représente. La transformation τ fait correspondre à P_1, P_2 des points P'_1, P'_2 et τ^2 des points P''_1, P''_2. Aux couples $P'_1\, P'_2$ et $P''_1\, P''_2$ correspondent sur F des points P', P''. Il existe une transformation birationnelle T de F en soi faisant correspondre P' à P, P'' à P' et P à P''. Cette transformation est donc cyclique de période trois et engendre sur F une involution I_3 d'ordre trois. Nous désignerons par F' une surface image de l'involution I_3 ; nous nous proposons de démontrer que F' est une surface d'irrégularité π'.

Les points unis de l'involution I_3 correspondent aux couples de points unis de l'involution i_3 sur L. Ces points sont de plusieurs sortes ; ils correspondent aux cordes de L suivantes :

1) Cordes joignant un point uni A situé dans α à un point uni β situé dans β ;

2) Cordes joignant deux points unis A situés dans α ou deux points unis B situés dans β ;

3) Tangentes AA' à la courbe L en un point uni A situé dans α ou tangentes BB' à la courbe L en un point uni B situé dans β.

3. Le système canonique $|C|$ de F est transformé en lui-même par T et contient trois systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_3. Commençons par déterminer la dimension de ces systèmes.

L'homographie τ de $S_{\pi-1}$ étant cyclique, est générale et on peut disposer de la figure de référence de telle sorte que ses sommets soient tous situés dans les axes σ, α, β. de l'homographie. Si nous désignons d'une manière générale par x un point de σ, par y un point de α et par z un point de β, nous pourrons représenter symboliquement l'homographie τ par les équations

$$x' : y' : z' = x : \epsilon y : \epsilon^2 z,$$

où ϵ est une racine cubique primitive de l'unité.

Voyons maintenant comment τ opère sur les droites de $S_{\pi-1}$. Nous pouvons représenter les coordonnées de la droite passant par deux points m, n de $S_{\pi-1}$ par le symbole $|m\,n|$, où m, n sont des points x, y ou z. Moyennant cette convention, les droites de $S_{\pi-1}$ seront de six sortes : $|x\,x|$, $|y\,y|$, $|z\,z|$, $|y\,z|$, $|z\,x|$, $|x\,y|$.

On aura

$$\frac{|x'\,x'|}{|x\,x|} = \frac{|y'\,y'|}{\epsilon^2\,|y\,y|} = \frac{|z'\,z'|}{\epsilon\,|z\,z|} =$$

$$\frac{|y'\,z'|}{|y\,z|} = \frac{|z'\,x'|}{\epsilon^2\,|z\,x|} = \frac{|x'\,y'|}{\epsilon\,|x\,y|}.$$

On en conclut que dans l'espace S_R de F, l'homographie T possède trois axes ponctuels :

1) Un axe σ_0 contenant les points qui correspondent aux droites joignant deux points x de σ ou un point y de α à un point z de β. Si l'on désigne par r et s les dimensions respectives de α, β, la dimension σ_0 sera

$$\binom{\pi'}{2} + (r+1)(s+1) - 1.$$

2) Un axe σ_1 contenant les points qui correspondent aux droites joignant deux points de β et aux droites joignant un point de σ à un point de α. Sa dimension est

$$\binom{s+1}{2} + \pi'(r+1) - 1.$$

3) Un axe σ_2 contenant les points qui correspondent aux droites joignant deux points de α et aux droites joignant un point de σ à un point de β. Sa dimension est

$$\binom{r+1}{2} + \pi'(s+1) - 1.$$

D'après la théorie des homographies cycliques, on doit avoir, dans $S_{\pi-1}$,

$$r + s + \pi' + 2 = \pi$$

et dans l'espace S_R de F,

$$\binom{\pi'}{2} + (r+1)(s+1) + \binom{s+1}{2} + \pi'(r+1)$$
$$+ \binom{r+1}{2} + \pi'(s+1) = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1).$$

On vérifie sans peine que la seconde égalité est une conséquence de la première.

Nous désignerons par $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ les systèmes partiels contenus dans $|C|$ et appartenant à l'involution I_3. Les courbes C_0 seront découpées sur F par les hyperplans contenant σ_1, σ_2 ; les courbes C_1 par les hyperplans contenant σ_2, σ_0 et les courbes C_3 par les hyperplans contenant σ_0, σ_1.

4. Nous avons rangé tantôt les points unis de I_3 en trois catégories. Nous appellerons (AB) un point uni correspondant à la droite joignant un point A de α à un point B de β, les points A, B appartenant à L. Un point (A_1A_2) sera un point uni représentant deux points A_1, A_2 de la courbe L appartenant à l'espace α ; de même, le point uni (B_1B_2) représentera deux points B_1, B_2 de L appartenant à l'axe β. Un point uni (AA') représentera le point A appartenant à L et à α, compté deux fois ; il correspondra donc à la tangente AA' à la courbe L au point A. De même, le point uni (BB') correspondra à la tangente à la courbe L en un point B de cette courbe appartenant à l'axe β.

L'axe ponctuel σ_0 de T contient les points (AB), (AA') et (BB') ; l'axe σ_1 contient les points (B_1B_2) et l'axe σ_2 les points (A_1A_2). Il en résulte que les courbes C_0 passent par les points (A_1A_2) et (B_1B_2), les courbes C_1 par les points (A_1A_2), (AB), (AA') et (BB') ; les courbes C_2 par les points (B_1B_2), (AB), (AA') et (BB').

L'un des systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, $|C_2|$ est le transformé du système canonique de F' ; pour déterminer ce système, il faut étudier la structure des points unis de I_3. Rappelons que ces points sont unis parfaits si tous les points de F infiniment voisins du point considéré sont unis pour I_3, unis non parfaits dans le cas contraire. Dans ce dernier cas, il y a deux points unis de I_3 infiniment voisins du point uni considéré.

Rappelons aussi que les courbes canoniques de F, transformées des courbes canoniques de F', passent simplement par les points unis parfaits de I_3, mais ne passent pas par les points unis non parfaits de cette involution.

5. Considérons un point uni (AB). Observons que dans l'espace $S_{\pi-1}$, il y a deux surfaces lieux de cordes de L transformées en elles-mêmes par τ ; ce sont les cônes projetant L de A et de B. Les génératrices de ces cônes, infiniment voisines de la droite AB, sont évidemment unies pour τ.

Les cordes de L s'appuyant sur un espace linéaire $S_{\pi-3}$, à $\pi - 3$ dimensions, forment une réglée à laquelle correspond, sur F, une courbe canonique C de cette surface. Si cet espace $S_{\pi-3}$ est transformé en lui-même par τ, la courbe canonique correspondante est transformée en elle-même par T et le point de cette courbe infiniment voisin du point (AB), est uni pour I_3.

Soit P un point de la corde AB, distinct des points A, B. S'il existait un espace linéaire $S_{\pi-3}$ uni pour τ, ne contenant pas la droite AB, passant par P, les cordes de L s'appuyant sur cet espace formeraient une réglée transformée en elle-même par τ ; la droite de cette réglée infiniment voisine de AB serait unie pour τ et le point (AB) serait uni parfait pour I_3. Or, un tel espace $S_{\pi-3}$ ne peut exister, puisque P n'est pas uni pour τ. Le point (AB) ne peut donc être uni parfait pour I_3.

6. Considérons maintenant deux points unis A_1, A_2 de L appartenant à l'espace α. Fixons l'attention sur une corde de L, infiniment voisine de la droite A_1A_2, mais d'ailleurs quelconque, et soit P le point de A_1A_2 situé sur la plus courte distance de A_1A_2 et de la droite considérée. Puisque α contient deux points unis, on a $r \geqslant 1$ et par conséquent $\pi' + s + 1 \leqslant \pi - 2$. Il existe au moins un espace linéaire $S_{\pi-3}$ passant par β, par P et coupant σ suivant un espace à $\pi' - 2$ dimensions. Cet espace $S_{\pi-3}$ est uni et les cordes de L qui le rencontrent forment une réglée unie pour τ. La droite de cette réglée infiniment voisine de A_1A_2 est donc unie pour τ ; c'est précisément la droite choisie initialement et par conséquent toutes les cordes de L infiniment voisines de A_1A_2 sont unies pour τ. Il en résulte que le point (A_1A_2) de F est uni parfait pour I_3.

On démontre de même que le point (B_1B_2) est uni parfait pour I_3.

7. Envisageons maintenant un point uni (AA'). On peut construire deux réglées, unies pour τ, formées de cordes de L et appartenant, au moins partiellement, à des complexes linéaires de droites de $S_{\pi-1}$.

L'une de ces réglées est le cône projetant la courbe L du point A (réglée qui appartient au complexe linéaire lieu des droites s'appuyant sur un espace $S_{\pi-3}$ passant par A). La droite du cône, infiniment voisine de AA', est unie pour τ.

Pour obtenir la seconde réglée, considérons un espace linéaire $S_{\pi-3}$ contenant β, coupant σ suivant un espace linéaire à $\pi' - 2$ dimensions et α suivant un espace linéaire à $r - 1$ dimensions ne contenant pas A. Cet espace est uni pour τ et la réglée lieu des cordes de L s'appuyant sur cet espace $S_{\pi-3}$ est unie pour τ ; elle contient la droite AA' et la droite de la surface infiniment voisine de AA' est unie pour τ.

Si le point (AA') était uni parfait pour I_3, il devrait exister, comme plus haut (nº 6), des espaces $S_{\pi-3}$, unis pour τ, ne contenant pas AA' et coupant la droite AA' en un point distinct de A, A'. Cela est impossible, donc le point (AA') est uni non parfait pour I_3. Il en est de même des points (BB').

8. Nous sommes maintenant en mesure de calculer le genre arithmétique p'_a et le genre linéaire $p'^{(1)}$ de la surface F'.

Nous avons appelé δ_1 le nombre des points unis A situés dans l'espace α et sur la courbe L, δ_2 le nombre de points unis B de β situés sur L. Le nombre des points unis parfaits de l'involution I_3 est donc

$$\mu = \binom{\delta_1}{2} + \binom{\delta_2}{2}.$$

Le nombre des points unis non parfaits de l'involution I_3 est

$$\nu = \delta_1\delta_2 + \delta_1 + \delta_2.$$

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p''_a de F', nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 3.12(p'_a + 1) - 4\mu - 8\nu.$$

Actuellement, on a donc

$$18(p'_a + 1) = 3(\pi - 1)(\pi - 2) + \delta^2 + 3\delta + \delta_1\delta_2,$$

car $\delta_1 + \delta_2 = \delta$.

D'autre part, le système transformé du système canonique de F' devant avoir pour points-base les points unis parfaits (A_1A_2), (B_1B_2), est le système $|C_0|$. On a donc

$$p_i = \binom{\pi'}{2} = (r + 1)(s + 1).$$

Calculons l'irrégularité $q = p'_g - p'_a$ de F'. Observons que l'on a, par la formule de Zeuthen,

$$3(\pi' - 1) + \delta = \pi - 1.$$

Ensuite, si nous retournons à la courbe L de $S_{\pi-1}$, les hyperplans passant par σ et α découpent sur L une série d'ordre $2\pi - 2 - \delta_1$, appartenant à l'involution i_3. Il lui correspond sur L' une série linéaire complète non spéciale dont la dimension est d'une part s et d'autre part

$$\frac{2\pi - 2 - \delta_1}{3} - \pi'.$$

On a donc, en tenant compte de la formule de Zeuthen,

$$3(s + 1) = 3(\pi' - 1) + 2\delta - \delta_1.$$

De même, on a

$$3(r + 1) = 3(\pi' - 1) + 2\delta - \delta_2.$$

Tenant compte de ces relations, on trouve facilement

$$q = p_g' - p_a' = \pi'$$

On a d'autre part, pour le genre linéaire,

$$(\pi - 1)(4\pi - 9) = 3(p'^{(1)} - 1) + \binom{\delta_1}{2} + \binom{\delta_2}{2}.$$

9. Pour obtenir un modèle projectif de la surface F', rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire ayant $p_g' - 1$ dimensions. Sur ce modèle projectif, aux points unis parfaits (A_1A_2), (B_1B_2) de l'involution I_3 correspondant des droites de degré -3.

Aux points unis non parfaits correspondent des points doubles biplanaires ordinaires.

La surface F', d'ordre $p'^{(1)} - 1$, contient donc

$$\mu = \binom{\delta_1}{2} + \binom{\delta_2}{2}$$

droites de degré -3 et

$$\nu = \delta_1 \delta_2 + \delta_1 + \delta_2$$

points doubles biplanaires ordinaires.

10. Il nous reste maintenant à examiner le cas où l'homographie τ, qui engendre l'involution i_3 sur la courbe L de l'espace $S_{\pi-1}$, n'a que deux axes ponctuels σ, α. L'un de ces axes, σ, ne rencontre pas L et a la dimension $\pi' - 1$. L'autre axe, α, doit toucher L aux δ points unis, puisque les hyperplans passant par α doivent contenir deux fois ces δ points, d'après l'interprétation géométrique de la formule de Zeuthen due à M. Castelnuovo.

Les hyperplans passant par σ découpent sur L une série linéaire d'ordre $2\pi - 2$ appartenant à l'involution i_3. Or cette série correspond sur L' une série d'ordre $\frac{1}{3}(2\pi - 2)$, qui ne peut être spéciale puisque d'ordre supérieur à $2\pi' - 2$. Cette série a donc la dimension

$$r = \frac{1}{3}(2\pi - 2) - \pi'.$$

L'espace α a également la dimension r et d'après la théorie des homographies cycliques, on a

$$r + \pi' + 1 = \pi.$$

En comparant les deux valeurs de r obtenues, on obtient $\pi = 1$, contrairement à l'hypothèse $\pi > 3$.

Observons d'ailleurs que si $\pi = 1$, le raisonnement précédent n'est plus valable, puisqu'on ne peut parler de la courbe canonique elliptique L.

Liége, le 24 décembre 1946.