Extrait du *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège*
Séance du 16 mars 1944. — N° 3.

Construction d'une surface canonique du septième ordre,

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Dans ses *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* [1], M. Enriques, cherchant à déterminer les surfaces canoniques de l'espace ordinaire, indique la possibilité de l'existence d'une surface du septième ordre ayant une courbe double d'ordre sept et un point triple, triple également pour la courbe double. De plus, cette courbe n'appartient pas à une surface cubique irréductible.

Nous nous proposons, dans cette note, d'établir l'existence de cette surface. Nous démontrons précisément que :

Il existe une surface du septième ordre, ayant une courbe double d'ordre sept et de genre quatre, et un point triple à la fois pour la surface et pour la courbe double, celle-ci n'appartenant pas à une surface cubique irréductible, mais étant tracée sur un cône du second ordre dont le point triple est le sommet.

1. Soit Q un cône du second ordre de sommet O. On peut représenter le cône Q point par point sur un plan σ de manière qu'à ses sections planes correspondent les cubiques γ_3 ayant un point double A et trois points simples A_1, A_2, A_3 situés sur une droite p. Le domaine du point O sur Q correspond à la droite p.

Aux sections de Q par les surfaces du septième ordre ayant un point triple en O correspondent dans σ des courbes d'ordre 21 comprenant trois fois la droite p et complétées par les courbes γ_{18} d'ordre 18 passant sept fois par A et quatre fois par chacun des points A_1, A_2, A_3.

S'il existe une de ces surfaces du septième ordre touchant Q le long d'une courbe C d'ordre sept, il correspond à C dans σ une courbe dont le double appartient au système $|\gamma_{18}|$. Cette courbe, γ_9, est d'ordre 9, passe sept fois par A et deux fois par chacun des points A_1, A_2, A_3.

Il en résulte que la courbe C a un point triple en O et qu'elle est de genre quatre.

Aux sections de Q par les surfaces cubiques passant par O

[1] Rédigées par M. Campedelli (Padova, Cedam, 1932). Voir p. 316.

correspondent dans σ les courbes γ_8 d'ordre 8 passant six fois par A et deux fois par chacun des points A_1, A_2, A_3. La courbe γ_9 ne peut appartenir au système $|\gamma_8|$, il n'y a donc aucune surface cubique irréductible passant par C.

2. Supposons qu'il existe une surface du septième ordre F_0 touchant le cône Q le long de la courbe C.

Le plan polaire d'un point P par rapport à Q passe par O et coupe encore C en quatre points R_1, R_2, R_3, R_4 se distribuant par couples sur deux génératrices du cône. En un de ces points, le plan tangent au cône est également tangent à la surface F_0.

La surface du sixième ordre, polaire du point P par rapport à F_0, a un point double en O et rencontre encore C en 36 points parmi lesquels se trouvent les quatre points R_1, R_2, R_3, R_4. En un des 32 points restants, le plan tangent à F_0 ne peut être déterminé, car il serait aussi tangent en ce point au cône Q, ce qui est impossible. Il en résulte que les 32 points restants sont doubles pour F_0.

Si un cône du second ordre touche une surface du septième ordre ayant un point triple au sommet du cône, suivant une courbe du septième ordre, la surface du septième ordre possède 32 points doubles sur la courbe de contact.

3. Supposons qu'il existe une surface F du septième ordre ayant C comme courbe double et O comme point triple. Les surfaces du faisceau déterminé par F et F_0 touchent Q le long de C. Toutes les surfaces de ce faisceau ont un point triple en O et 32 points doubles fixes qui sont les points doubles de F_0 situés sur C.

Le faisceau comprend une surface formée de Q et d'une surface Φ du cinquième ordre passant par O et par les 32 points doubles de F_0 situés sur C.

Inversement, supposons qu'il existe une surface Φ du cinquième ordre passant par O et par les 32 points doubles de F_0 sur C, sans contenir cette courbe. Les surfaces du faisceau déterminé par F_0 et par $Q+\Phi$ ont un point triple en O et 32 points doubles fixes sur C. Il existe une surface du faisceau touchant en un point R de C une droite non tangente en ce point au cône. Cette surface, F, possède un point double en R et, par conséquent, passe doublement par la courbe C. En effet, la polaire d'un point quelconque n'appartenant pas au plan tangent à Q en R, par rapport à F, passe par R et rencontre donc C en 43 points, donc contient cette courbe. Le plan tangent à F en un point de celle-ci est donc indéterminé.

Observons que les surfaces du cinquième ordre passant par O et ne comprenant pas Q comme partie sont en nombre ∞^{34}. Il existe donc une, Φ, de ces surfaces, irréductible, passant par les 32 points doubles de F_0 sur C, sans contenir cette courbe. La surface $Q+\Phi$ possède bien un point triple O et des points doubles aux points doubles de F_0 sur C. On en conclut que s'il existe une surface du septième ordre F_0 touchant Q le long de C, il existe une surface du septième ordre ayant C comme courbe double.

4. Pour prouver l'existence de F_0, observons que les cubiques γ_3 de σ passant deux fois par A et une fois par A_1, A_2, A_3 ont pour équation

$$x_3(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_1 x_2 + \lambda_3 x_2^2) + \lambda_4 x_1 x_2 (x_1 - x_2) = 0,$$

le triangle $A_1A_2A_3$ étant choisi comme triangle de référence et le point unitaire étant choisi de telle sorte que A_3 ait pour coordonnées 1, 1, 0.

Rapportons projectivement les courbes γ_3 aux plans de l'espace en posant

$$\frac{X_1}{x_3x_1^2} = \frac{X_2}{x_3x_1x_2} = \frac{X_3}{x_3x_2^2} = \frac{X_4}{x_1x_2(x_1-x_2)},$$

L'équation du cône Q, qui correspond au plan σ, est

$$X_1X_3 - X_2^2 = 0.$$

Une surface du septième ordre ayant le sommet O (0, 0, 0, 1) de ce cône pour point triple a pour équation

$$X_4^4 f_3(X_1, X_2, X_3) + X_4^3 f_4 + X_4^2 f_5 + X_4 f_6 + f_7 = 0, \tag{1}$$

où les f sont des polynomes en X_1, X_2, X_3 dont le degré est indiqué par l'indice.

A la section de Q par cette surface correspond dans σ la courbe γ_{18} d'équation

$$\left.\begin{aligned} x_1^4x_2^4(x_1-x_2)^4 f_3(x_1^2, x_1x_2, x_2^2) + x_3x_1^3x_2^3(x_1-x_2)^3 f_4 + \cdots \\ + x_3^4 f_7(x_1^2, x_1x_2, x_2^2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

L'équation de la courbe γ_9 qui correspond à C dans σ s'écrit

$$x_3^2\varphi_7(x_1, x_2) + x_3x_1x_2(x_1-x_2)\varphi_5 + x_1^2x_2^2(x_1-x_2)^2\varphi_3 = 0,$$

où les φ sont les polynomes en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice.

Élevons les deux membres de cette équation au carré et posons

$$f_7 = \varphi_7^2, \; f_6 = 2\,\varphi_5\varphi_7, \; f_5 = \varphi_5^2 + 2\,\varphi_3\varphi_7, \; f_4 = \varphi_3\varphi_5, \; f_3 = \varphi_3^2.$$

L'équation s'écrit sous la forme (2). En retournant à l'équation (1) sous les conditions précédentes, on obtient l'équation de la surface F_0.

Ainsi se trouve établie l'existence de la surface F, du septième ordre, ayant le point triple O et la courbe double C.

5. Le système $|K|$ des sections planes de la surface F coïncide avec le système canonique de la surface, donc on a $p_g = 4$.

L'ordre de F est égal à $p^{(1)} - 1 = 7$, donc $p^{(1)} = 8$.

Le système bicanonique $|2K|$, adjoint à $|K|$, est régulier et on a $P_2 = p_a + p^{(1)}$.

Les biadjointes à la surface F sont les surfaces du sixième ordre passant doublement par C.

Parmi les biadjointes se trouvent les ∞^9 surfaces formées du cône Q compté deux fois et d'une quadrique de l'espace.

Les surfaces du quatrième ordre ne contenant pas Q comme partie sont en nombre ∞^{24}. Celles qui, en outre, passent par O sont en nombre ∞^{23} et découpent sur C une série linéaire d'ordre 25, certainement non spéciale et par suite de dimension 21. Il y a donc ∞^1 de ces surfaces du quatrième ordre qui contiennent C. Ces dernières surfaces, jointes au cône Q, donnent ∞^1 biadjointes à F. On a donc $P_2 \geqslant 12$.

D'autre part, on a $p_a \leqslant p_g$, donc $P_2 \leqslant 12$ et par suite $P_2 = 12$.

La surface du septième ordre F, *ayant* O *comme point triple et une courbe double* C *d'ordre sept ayant également* O *comme point triple, est régulière et a les genres*

$$p_a = p_g = 4, \; p^{(1)} = 8, \; P_2 = 12.$$

On peut ajouter qu'il n'existe aucune surface du sixième ordre irréductible ayant la courbe C comme courbe double.

Liége, le 2 mars 1944.

M. HAYEZ, Imprimeur de l'Académie royale de Belgique, rue de Louvain, 112, Bruxelles.
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)