L. GODEAUX (Liège - Belgio)

SUR LA THÉORIE DES SURFACES ET L'ESPACE RÉGLÉ

1. - Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées projectives homogènes de Wilczynski d'un point d'une surface (x) de S_3 rapportée à ses asymptotiques u, v. Elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20}+2bx^{01}+c_1x=0,$$
$$x^{02}+2ax^{10}+c_2x=0,$$

où l'on a posé

$$x^{ik}=\frac{\partial^{i+k}x}{\partial u^i\partial v^k}.$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$a^{20}+c_2^{10}+2ba^{01}+4ab^{01}=0,$$
$$b^{02}+c_1^{01}+2ab^{10}+4ba^{10}=0,$$
$$c_1^{02}+4a^{10}c_1+2ac_1^{10}=c_2^{20}+2bc_2^{01}+4b^{01}c_2.$$

Représentons les droites de S_3 par les points d'une hyperquadrique Q de S_5 et soient U, V les images des droites xx^{10}, xx^{01} sur Q. Les surfaces (U), (V) sont consécutives dans une suite de Laplace (BOMPIANI, TZITZEICA) et on a

$$U^{10}+2bV=0,\qquad V^{01}+2aU=0.$$

On désignera par U_1, U_2,.... les transformés successifs de Laplace dans le sens des v, par V_1, V_2,.... ceux de V dans le sens des u.

2. - Nous avons démontré (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41) que la suite de Laplace ...., U, V,.... est autopolaire par rapport à Q.

Les plans UU_1U_2, VV_1V_2 sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques représentant les génératrices des deux modes de la quadrique de Lie Φ de la surface (x) au point x (BOMPIANI).

Les plans $U_iU_{i+1}U_{i+2}$, $V_iV_{i+1}V_{i+2}$ sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique en des points représentant les génératrices des deux modes d'une quadrique Φ_i. On ainsi une suite de quadriques Φ, Φ_1, Φ_2,.... attachée à chaque point x d'une surface (x). Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points dont le lieu, lorsque x décrit la surface (x), est une nappe commune de l'enveloppe de ces quadriques.

3. - Considérons une droite j engendrant une congruence W dont (x) est une surface focale. Le point J, image sur Q de la droite j, est donné par

$$J=\lambda U-\mu V$$

où

$$\mu^{10}+2b\lambda=0, \quad \lambda^{01}+2a\mu=0.$$

La surface (J) est conjuguée à la congruence (UV). Désignons par J_1, J_2,.... les transformés successifs de Laplace de J dans le sens des v, par J_{-1}, J_{-2},.... les transformés dans le sens des u. La suite ...., J_1, J, J_{-1},.... est inscrite dans la suite ...., U, V,.... Désignons par P_i le pôle de l'hyperplan $J_{i-2}J_{i-1}J_iJ_{i+1}J_{i+2}$ par rapport à Q. La suite de Laplace ...., P_{-1}, P, P_1,.... est circonscrite à la suite ...., U, V,....

Les plans JJ_1J_2 et PP_1P_2 sont conjugués par rapport à Q et les sections de Q par ces plans représentent les génératrices des deux modes d'une quadrique Ψ qui se raccorde à la quadrique de Lie Φ suivant la droite xx^{01}. De même, les plans $JJ_{-1}J_{-2}$ et $PP_{-1}P_{-2}$ coupent Q en des points représentant les génératrices des deux modes d'une quadrique Ψ' se raccordant le long de xx^{10} à la quadrique de Lie Φ.

Plus généralement, les plans $J_iJ_{i+1}J_{i+2}$ et $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les génératrices des deux modes d'une quadrique que nous désignerons par Ψ_i si $i>0$, par Ψ'_{-i} si $i<0$.

Nous avons ainsi deux familles de quadriques Ψ, Ψ_1,.... et Ψ', Ψ_1',.... Deux quadriques consécutives d'une famille se touchent en quatre points.

Les quadriques Φ, Ψ et Ψ' ont entre elles les relations suivantes: Deux génératrices d'un mode de la quadrique Φ_{i-1} appartiennent à la fois aux quadriques Ψ_{i-1}, Ψ_i; deux génératrices du même mode de cette quadrique appartiennent à la fois aux quadriques Ψ_i', Φ_i. Les quadriques Ψ'_{i-1}, Ψ' ont en commun deux génératrices du second mode de la quadrique Φ_{i-1} et il en est de même des quadriques Ψ_i et Φ_i.

4. - Les points où la droite U_1V_1 recontre l'hyperquadrique Q sont les images des directrices de Wilczynski relatives au point x de la surface (x).

Les foyers de la directrice de Wilczynski r passant par le point x sont donnés par

$$[16ab-(\log. ab)^{11}-(\log. a)^{10}(\log. b)^{01}\pm\varphi]x+$$
$$+2x^{10}(\log. b)^{01}+2x^{01}(\log. a)^{10}-4x^{11},$$

où

$$\varphi=\sqrt{\overline{\left(\log.\frac{a}{b}\right)^{11}}^{2}+\alpha\beta},$$

$$\alpha=2(\log.a)^{20}+\overline{(\log.a)^{10}}^{2}+4(b^{01}+c_1),$$

$$\beta=2(\log.b)^{02}+\overline{(\log.b)^{01}}^{2}+4(a^{10}+c_2).$$

Les plans focaux de la seconde directrice s de Wilczynski coupent la droite r aux points

$$[(\log.ab)^{11}-(\log.a)^{10}(\log.b)^{01}\pm\varphi]x+$$
$$+2x^{10}(\log.b)^{01}+2x^{01}(\log.a)^{10}-4x^{11}.$$

Désignons par p, q les foyers de r correspondant respectivement aux signes $+$ et $-$ dont φ est affecté, par m' et n' les points de rencontre des plans focaux de s avec r choisis de la même manière. L'involution déterminée sur r pas les couples de points p, n' et q, m' possède comme point uni le point x. Le second point uni y décrit une surface (y) sur laquelle les lignes u, v, ne sont pas en général des asymptotiques.

5. - Lorsque les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques, la suite de Laplace ....U, V,.... a la période six, c'est-à-dire que V_5 coïncide avec U, et réciproquement (Bulletins de l'Académie roy. de Belgique, 1928, pp. 158-186, 345-348). Le second point caractéristique des quadriques de Lie, y, engendre une surface dont les asymptotiques sont les lignes u, v (Demoulin). Les tangentes aux asymptotiques yy^{01}, yy^{10} sont représentées sur Q par le points U_2, V_2.

Les droites xx^{10} et yy^{10} se rencontrent en un point m et les droites xx^{01} et yy^{01} en un point n (Demoulin). Les directrices de Wilczynski de la surface (x) sont les droites $r=xy$ et $s=mn$. Les foyers de la droite s sont les points m et n.

Lorsque l'on a

$$(\log.a)^{11}=(\log.b)^{11},$$

les droites r passent par un point fixe et les droites s sont situées dans un plan fixe. C'est le seul cas où deux surfaces ayant mêmes quadriques de Lie sont projectivement applicables.

Lorsque l'égalité précédente n'est pas vérifiée, on a les propriétés suivantes: Soient p, q les foyers de la droite r, q étant le transformé de Laplace de p dans le sens des u. Le point n est le transformé de Laplace de m dans le sens des u. Soient m_1 le transformé de Laplace de m dans le sens des v, n_1 celui de n dans le sens des u. Les points m_1, n_1 appartiennent à la droite r. La suite de Laplace ...., m_1, m, n, n_1,.... est doublement inscrite dans la suite ...., p, q,.... Les quaternes des points $(xypn_1)$, $(xyqm_1)$ sont harmoniques. La droite $s=mn$ engendre une congruence de Goursat.

Inversement, soient m, n les foyers d'une droite s engendrant une congruence de Goursat, m_1, n_1 les transformés de Laplace de m, n respectivement dans le sens des v et des u. Si l'on désigne par p, q les foyers de la droite m_1n_1 et si les réseaux (m_1) (n_1) sont conjugués à la congruence (pq), les points x, y tels que les quaternes $(xypm_1)$, $(xyqn_1)$ soient harmoniques décrivent des surfaces sur lesquelles les développables de la congruence (pq) découpent les asymptotiques et qui ont mêmes quadriques de Lie.

BIBLIOGRAPHIE

BOMPIANI. Rend. Circ. matem. Palermo, 1912; Rend. R. Accad. Lincei, 1926; Appendice II au Traité: *Geometria proiettiva differenziale* de MM. FUBINI et ČECH (Bologne, 1927).

DEMOULIN. C. R. 1908, t. CXLVII; 1924, t. CLXXIV.

TZITZEICA. *Géométrie différentielle projective des réseaux.* (Paris, 1924).

Estratto dagli *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*

Bologna, 3-10 settembre 1928 - VI