Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 30e année, no 3-4, 1961, pp. 97-104

SUR LES POINTS UNIS DES HOMOGRAPHIES CYCLIQUES DU PLAN

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

Rappelons tout d'abord quelques résultats que nous avons obtenus sur les involutions cycliques d'ordre premier, n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique (1).

Soit F une surface algébrique, T une transformation birationnelle de période p, p étant un nombre premier impair, de F en soi. Supposons que l'involution d'ordre p, engendrée sur F par T, ne possède qu'un nombre fini de points unis. Ces points unis peuvent être de deux espèces. Dans le domaine du premier ordre d'un point uni de première espèce, T donne l'identité, tandis que dans le domaine du premier ordre d'un point uni de seconde espèce, T donne une involution d'ordre p.

Soit A un point uni de seconde espèce. Dans son domaine du premier ordre, il possède deux points unis qui peuvent, à leur tour, être de première ou de seconde espèce (La répartition des points unis en deux espèces se transporte sans difficulté aux points unis fictifs des domaines des différents ordres de A). Chacun de ces points unis, s'il est de seconde espèce, possède dans son domaine du premier ordre, c'est-à-dire dans le domaine du second ordre de A, deux points unis. Et aussi de suite. Le point A est le pied d'une sorte d'arbre dont chaque nœud est un point uni origine de deux rameaux s'il est de seconde espèce, ou termine la branche s'il est uni de première espèce.

Considérons maintenant un système linéaire $|C|$, dépourvu de points-base, dont chaque courbe est transformée en elle-même par T (En d'autres termes, $|C|$ est composé au moyen de l'involution engendrée sur F par T). Les courbes C passant par A acquièrent une certaine multiplicité en ce point et passent par un certain

Manuscrit reçu, le 22-12-60.

nombre de points fictifs, unis pour T, formant des chaînes ayant pour origine A. Les derniers points de ces chaînes sont unis de première espèce et nous avons démontré que leur nombre était au moins égal à deux et au plus à quatre.

L'exemple le plus simple d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis est donné lorsque F est un plan et T une homographie cyclique non homologique. Il y a alors trois points unis de seconde espèce (²). Dans ce cas on peut prendre pour système $|C|$ le système des courbes d'ordre p satisfaisant aux conditions indiquées et utiliser les transformations quadratiques pour étudier les singularités des courbes C passant par un point uni en ce point. Il nous a paru intéressant de rechercher une démonstration directe du théorème rappelé ci-dessus, à savoir que les courbes C passant par un point uni ont en commun, dans les domaines de celui-ci, deux, trois ou quatre points unis de première espèce. C'est l'objet de cette note.

1. Soit p un nombre premier impair et ε une racine primitive d'ordre p de l'unité. Considérons l'homographie H, cyclique de période p,

$$\begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^{\alpha} x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

où α est un entier compris entre 1 et p. Les points unis de cette homographie sont les sommets du triangle de référence ; nous nous attacherons à l étude de la structure du point uni $O_1(x_2 = x_3 = 0)$. Ce point est uni de seconde espèce et les points unis infiniment voisins sont situées sur les droites $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Pour les faire apparaître, nous utiliserons les transformations quadratiques suivantes :

La première transformation, que nous désignerons par T_2, a pour équations

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_2 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

elle fait correspondre au point uni infiniment voisin de O_1 sur $x_3 = 0$ le point $x'_2 = x'_3 = 0$. Son inverse a pour équations

$$\begin{pmatrix} x_1 x_2 & x_2^2 & x_1 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

elle transforme l'homographie H dans l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^{\alpha-1} x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

On voit que si α est supérieur à 2, le point uni infiniment voisin de O_1 sur $x_3 = 0$ est uni de seconde espèce ; il est uni de première espèce si $\alpha = 2$, l'homographie précédente étant alors homologique.

La seconde transformation, T_3, a pour équations

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_2x_3 & x_1x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

et fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur $x_2 = 0$ le point $x_2' = x_3' = 0$.

L inverse de T_3 est

$$\begin{pmatrix} x_1x_3 & x_1x_2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

de sorte que T_3 transforme l'homographie H dans l'homographie

$$\begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon^{p-\alpha+1}x_2 & \varepsilon^{\alpha+2}x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Le point uni infiniment voisin de O_1 sur $x_2 = 0$ n'est de première espèce que si $\alpha = \frac{1}{2}(p-1)$.

2. Nous allons maintenant former l'équation des courbes C, d'ordre p, formant un système linéaire sans points-base, composé au moyen de l'involution d'ordre p engendrée par l'homographie H. Dans cette équation se trouvent les termes x_1^p, x_2^p, x_3^p, donc lorsque l'on applique à un terme de l'équation l'homographie H, il se reproduit multiplié par $\varepsilon^0 = 1$. Nous appelerons courbes C les courbes dans l'équation desquelles le terme x_1^p manque. Ce qui nous intéresse en effet c'est le système linéaire de courbes passant par le point uni $O_1(1,0,0)$.

Nous poserons

$$p = a\alpha + h, \quad (h < \alpha).$$

L'équation des courbes C comprend des termes de la forme

$$x_1^{p-i-k}x_2^ix_3^k,$$

où

$$i + \alpha k \equiv 0, \quad (\text{mod. } p)$$

Lorsque $i + \alpha k = p$, on trouve une suite de termes

$$\Sigma\lambda_{1t}x_1^{p-(a+h)-t(\alpha-1)}x_e^{h+t\alpha}x_3^{a-t}, \tag{1}$$
$$(t = 1,2,\ldots, a).$$

Plus généralement, si nous désignons par m_r le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$rh > m_r\alpha,$$

l'équation des courbes C comprend les termes

$$\Sigma\lambda_{rt}x_1^{p-r(a+h)+(m_r-t)(\alpha-1)}x_2^{rh-(m_r-t)\alpha}x_3^{ra+m_r-t} \tag{2}$$
$$(t = 1,2,\ldots).$$

Naturellement, ces termes sont de degré p et on doit avoir

$$r(a + h) - (m_r - t)\,(\alpha - 1) \leqslant p,$$

c'est-à-dire

$$(\alpha - 1)\,(a + m_r - 1) - (r - 1)\,(a + h) \geqslant 0.$$

Observons que l'on peut avoir $i + \alpha k = \alpha p$; on a alors $i = 0$, $k = 1$, $r = \alpha$ et le terme correspondant est x_3^p.

Nous poserons dans la suite

$$\mathrm{L}_{r,t} = x_1^{p-r(a+h)-(m_r-t)(\alpha-1)}x_2^{rh-(m_r-t)\alpha}x_3^{ra+m_r-t}.$$

Considérons deux termes consécutifs L_{1t}, $\mathrm{L}_{1,\,t+1}$ de la suite (1). Les exposants de x_1 dans ces termes sont

$$p - (a + h) - t(\alpha - 1),\, p - (a + h) - (t + 1)\,(\alpha - 1).$$

Le premier est supérieur au second, donc dans la suite (1), les exposants de x_1 vont en décroissant lorsque t croît.

Considérons de même les exposants de x_1 dans deux termes consécutifs $\mathrm{L}_{r,\,t}$, $\mathrm{L}_{r,\,t+1}$ de la suite (2), c'est-à-dire

$$p-r(a+h)+(m_r-t)(\alpha-1),\;\; p-r(a+h)+(m_r-t-1)(\alpha-1).$$

Actuellement aussi, le premier de ces nombres est supérieur au second, donc, dans la suite (2), les exposants de x_1 vont en décroissant lorsque t croit.

3. Considérons les termes $\mathrm{L}_{1,0}$, $\mathrm{L}_{2,0},\ldots,\mathrm{L}_{r,0},\ldots$ Les nombres m_r sont les plus grands entiers satisfaisant aux inégalités

$$h > m_1\alpha,\; 2h > m_2\alpha,\ldots,\; rh > m_r\alpha.$$

On a $m_1 = 0$ et sous cette condition, la suite (1) se déduit de la suite (2) en faisant $r = 1$.

Il existe certainement un entier positif ρ tel que

$$(\rho - 1)h < \alpha,\; ph > \alpha.$$

puisque $h < \alpha$. On a alors $m_2 = m_3 = \ldots = m_{\rho-1} = 0$, $m_\rho = 1$, puis $m_{\rho+1} = \ldots = m_{2\rho-2} = 1$, $m_{2\rho-2} = 0$ ou 1, $m_{2\rho} = 2$. Et ainsi de suite.

On en conclut que la suite des nombres $m_2, m_3,\ldots$ est non décroissante.

Formons la différence entre l'exposant de x_1 dans $\mathrm{L}_{1,0}$ et l'exposant de x_1 dans $\mathrm{L}_{r,\,0}$. Nous aurons

$$p-(a+h)-[p-r(a+h)+m_r(\alpha-1)]=(r-1)(a+h)-m_r(\alpha-1). \tag{3}$$

Nous supposerons dans la suite

$$\alpha - 1 > a + h$$

l'hypothèse inverse sera examinée plus loin.

Dans ces conditions, il existe un nombre entier ω tel que

$$(\omega - 1)(a + h) < \alpha - 1 < \omega(a + h).$$

On en conclut que l'expression (3) est positive si

$$m_r < \frac{r-1}{\omega - 1}$$

et négative si

$$m_r > \frac{r-1}{\omega}. \tag{4}$$

Dans ce dernier cas, l'exposant de x_1 dans $L_{r,0}$ est supérieur à celui de x_1 dans $L_{1,0}$.

Considérons les deux termes $L_{r,0}$, $L_{s,0}$ et formons la différence entre les exposants de x_1 dans le premier et le second terme. Cela donne

$$p - r(a + h) + m_r(\alpha - 1) - [p - s(a - h) - m_s(\alpha - 1)] =$$
$$(s - r)(a+h) - (m_s - m_r(\alpha - 1). \tag{5}$$

Nous supposerons $s > r$. L'expression (5) est positive si

$$m_s < m_r + \frac{s-r}{\omega - 1},$$

négative si

$$m_s > m_r + \frac{s-r}{\omega}.$$

Dans le premier cas, l'exposant de x_1 dans $L_{r,0}$ est supérieur à celui de x_1 dans $L_{s,0}$. Dans le second cas, c'est l'inverse.

On en conclut que si, dans la suite des nombres m_2, m_3,... on prend le plus élevé, soit m_τ, et si ce nombre satisfait à l'inégalité (4), l'exposant de x_1 dans $L_{\tau,0}$ est supérieur aux exposants de x_1 dans tous les autres termes.

4. Écrivons maintenant l'équation des courbes C sous la forme

$$\Sigma\lambda_{1t} x_1^{p-(a+h)-t(\alpha-1)} x_2^{h+t\alpha} x_3^{a-t}$$
$$+ \Sigma\lambda_{rt} x_1^{p-r(a+h)+(m_r-t)(\alpha-1)} x_2^{rh-(m_r-t)r} x_3^{ra+m_r-t} = 0.$$

Le terme dont l'exposant de x_1 est le plus élevé étant

$$L_{\tau,0} = x^{p-\tau(a+h)+m_\tau(\alpha-1)} x_2^{\tau h - m_\tau \alpha} x_3^{\tau a + m_\tau},$$

le point O_1 est multiple d'ordre $\tau\,(a + h) - m_\tau(\alpha - 1)$ pour les courbes C. En ce point, $\tau h - m_\tau \alpha$ tangentes sont confondues avec $x_2 = 0$ et $\tau a + m_\tau$ avec $x_3 = 0$.

Opérons la transformation quadrique T_2. Il vient, après suppression du facteur commun $x_2^{\tau(a+h)-m_\tau(\alpha-1)}$,

$$\Sigma\lambda_{1t}x_1^{2(p-a)-h-t(\alpha-2)}x_2^{(m_\tau+t)(\alpha-1)-(\tau-1)(a+h)}x_3^{a-t}$$
$$+ \Sigma\lambda_{rt}x_1^{2(p-ra)-rh+(m_r-t)(\alpha-2)}x_2^{(r-\tau)(a+h)+(\alpha-1)(m_\tau-m_r+t)}x_3^{ra+m_r+t} = p.$$

On vérifie comme plus haut que le terme contenant x_1 à la plus haute puissance est le transformé de $L_{\tau,\,0}$, c'est-à-dire

$$x_1^{p-ra-m_\tau}x_3^{\tau a+m_\tau}$$

Le point (1,0,0) est donc multiple d'ordre $\tau a + m_\tau$ pour les courbes précédentes et les tangentes en ce point sont toutes confondues avec $x_3 = 0$.

Si l'on désigne par O_{21} le point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_2, on voit que ce point est multiple d'ordre $\tau a + m_\tau$ pour les courbes C.

5. Opérons maintenant sur les courbes C l'opération T_2^λ, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} x_1^{\lambda+1} & x_1^\lambda x_2 & x_2^\lambda x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\Sigma\lambda_{1t}x_1^{(\lambda+1)(p-a)-h-(\alpha-\lambda-1)t}x_2^{\lambda a+h+(\alpha-\lambda)t}x_3^{a-t}$$
$$+ \Sigma\lambda_{rt}x_1^{(\lambda+1)(p-ra)-rh+(m_r-t)(\alpha-\lambda-1)}x_2^{r(\lambda a+h)-(m_r-t)(\alpha-1)}x_3^{ra+m_r-t} = 0.$$

Au terme $L_{r,o}$ correspond le terme

$$x_1^{(\lambda+1)(p-\tau\alpha)-\tau h+m_\tau(\alpha-\lambda-1)}x_2^{\tau(\lambda a+h)-m_\tau(\alpha-1)}x_3^{\tau a+m_\tau}$$

Pour que l'équation de la transformée de C puisse être divisée par le facteur

$$x_2^{\tau(\lambda a+h)-m_\tau(\alpha-\lambda)},$$

on doit avoir

$$\lambda a + h \geqslant \tau(\lambda a + h) - m_\tau(\alpha - h),$$

c'est-à-dire

$$(\tau - 1)(\lambda a + h) \leqslant m_\tau(\alpha - h) \qquad (6)$$

Écrivons maintenant que l'exposant de x_1 dans le terme qui correspond à $L_{1,0}$ est supérieur à celui de x_1 dans le terme correspondant à $L_{\tau,0}$. On trouve

$$(\tau - 1)[(\lambda + 1)a + h_3 \geqslant m_\tau(\alpha - \lambda - 1). \qquad (7)$$

Désignons par l la plus grande valeur de λ satisfaisant à l'inégalité (6). C'est aussi la plus petite des valeurs de λ satisfaisant à l'inégalité (7).

Soient O_{21}, O_{22}, ..., O_{2l}, $O_{2,l+1}$... les points infiniment voisins successifs de O_1 dont le premier se trouve sur la droite O_1O_2. Les points O_{21}, O_{22},..., $O_{2,l-1}$ sont multiples d'ordre $\tau a + m_\tau$ pour les courbes C.

Posons, dans l'équation de la transformée des courbes C, $\lambda = h$. Le terme contenant x_1 à la plus haute puissance est le transformé de $L_{1,0}$, c'est-à-dire

$$x_1^{(l+1)(p-a)+h} x_2^{m_\tau(\alpha-l)-(\tau-1)(la+h)} x_3^a.$$

Le point (1,0,0) est multiple d'ordre $m_\tau(\alpha - \lambda) - (\tau - 1)(la + h) + a$ pour les courbes considérées. Celles-ci possèdent un point multiple d'ordre a infiniment voisin de (1,0,0) sur $x_3 = 0$ et un point multiple d'ordre $m_\tau(\alpha - l) - (\tau - 1)(la + h)$ sur la droite $x_2 = 0$, infiniment voisin de (1,0,0) également. Comme le point $O_{2,l-1}$ est multiple d'ordre $\tau a + m_\tau$ pour les courbes C, on doit avoir

$$\tau a + m_\tau > m_\tau(\alpha - l)(la + h),$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (7).

Ainsi donc, les courbes C ont la multiplicité $m_\tau(\alpha - \lambda) - (\tau - 1)(la + h) + a$ en O_{2l}. A ce point sont infiniment voisins dans une direction le point $O_{2,l+1}$ multiple d'ordre a et dans une autre direction, une suite de points infiniment voisins successifs dont le premier au moins a la multiplicité $m_\tau(\alpha - l) - (\tau - 1)(la + h)$. Cette suite se termine par un point commun à toutes les courbes C, uni de première espèce.

7. Opérons $\alpha - 1$ fois la transformation T_2. L'équation des courbes C devient

$$\begin{aligned} &\Sigma\lambda_{1t}\, x_1^{p(\alpha-1)} x_2^t x_3^{a-t} \\ &+ \Sigma\lambda_{rt}\, x_1^{p(\alpha-r} x_2^{(r-1)(p-a)-(m_r-t)} x_3^{ra+m_r-t} = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

Pour ces courbes, le point (1,0,0) est multiple d'ordre a à tangentes variables. On en conclut que les courbes C passent a fois par les points $O_{2,l+1}$, $O_{2,l+2}$..., $O_{2,\alpha-1}$, ce dernier point étant uni de première espèce.

Ainsi, dans l'hypothèse $\alpha - 1 > a + h$, parmi les branches des courbes C d'origine O_1 et touchant en ce point la droite $x_3 = 0$, il y a a branches linéaires passant par $O_{21}, O_{22}, \ldots, O_{2,\alpha-1}$ et un certain nombre de branches superlinéaires passant par $O_{21}, O_{22}, \ldots, O_{2l}$ et par une suite finie de points infiniment voisins successifs de ce dernier point.

7. Reste l'hypothèse $\alpha - 1 < a + h$.

Si l'on se reporte à l'équation (3), on constate que m_r ayant au plus la valeur $r - l$, le second membre est toujours positif, donc le terme de l'équation des courbes C qui a l'exposant de x_1 le plus élevé est $L_{1,0}$.

Cela étant, si l'on exécute $\alpha - 1$ fois l'opération T_2, on trouve l'équation (8) et on en conclut que dans l'hypothèse $\alpha - 1 < a + h$, les courbes C passent a fois par les points $O_{21}, O_{22}, \ldots, O_{2,\alpha-1}$, le dernier étant un point uni de première espèce.

Nous voyons donc que les branches des courbes C issues de O_1 et touchant en ce point $x_3 = 0$, passent par des suites de points infiniment voisins successifs se terminant par un ou deux points unis de première espèce.

On peut démontrer la même chose pour les branches des courbes C issues de O_1 et touchant en ce point la droite $x_2 = 0$ (On utilisera la transformation T_3 au lieu de T_2). Nous avons ainsi établi le théorème dont il fut question au début de cette note, dans le cas des involutions cycliques, d'ordre premier, du plan.

Liège, le 7 décembre 1960.

Bibliographie

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Actualités scient., n° 270 (Paris, Hermann, 1935), *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952), *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Colloque de Géométrie algébrique du C. B. R. M., Liège, 1952, pp. 225-241), *La théorie des involutions cycliques à une surface algébrique et ses applications* (Bull. de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1957, pp. 3-15).

(2) Les points unis des homographies cycliques du plan furent considérés sous le point de vue de ce travail dans nos notes *Sur les homographies planes cycliques* (Mém. Soc. roy. Sciences de Liège, 1928), *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies cycliques* (Idem, 1930), *Sur les courbes tracées sur la surface représentant l'involution engendrée par une homographie plane cyclique* (Idem, 1931).