CONGRUENZE W E TRASFORMAZIONI DI GUICHARD

Nota di Lucien Godeaux, a Liegi

Comunicazione fatta il 27 e 28 aprile 1956.

Le mie prime parole saranno per ringraziare il Preside della Facoltà di Scienze Prof. R. Calapso e i Colleghi della Università di Messina. Sono lieto di potere esporre i risultati sulle congruenze W ottenuti nel Belgio da A. Demoulin, O. Rozet et da me, qui in Sicilia, dove ha lavorato il compianto Prof. Pasquale Calapso. Mi ricordo che, tante volte, il mio amico Demoulin mi ha detto il grande interesse dei risultati ottenuti da questo eminente matematico.

Nello studio della Geometria proiettiva-differenziale delle superficie, ho sistematicamente utilizzato la rappresentazione dello spazio rigato sulla iperquadrica di Klein. Sarà questo metodo che utilizzeremo in queste conferenze.

Ad una superficie è associata nello S_5 una successione di Laplace, autopolare rispetto all' iperquadrica di Klein. Dopo avere ricordato le proprietà delle superficie così ottenute, noi consideriamo una congruenza W, cioè una congruenza sulle falde focali della quale le asintotiche si corrispondono. A questa congruenza sono associate quattro successioni di Laplace nello S_5. Ne deduciamo varie proprietà ed in particolare l' esistenza di una successione di quadriche associata ad ogni retta della congruenza.

Noi consideriamo poi due congruenze W, che hanno in comune una falda focale ed anche qui, ne deduciamo l' esistenza di una altra successione di quadriche. Due quadriche di questa successione erano già state ottenute da Demoulin.

Bianchi ha chiamato « trasformazione asintotica » e Demoulin « trasformazione di Guichard » la corrispondenza tra i fuochi delle rette di una congrueuza W. Utilizzeremo la denominazione di Demoulin.

Prima di chiudere queste conferenze, daremo qualche breve indicazione sopra ricerche di Rozet sulle congruenze non W.

1. — Rammentiamo dapprima qualche proprietà delle superficie.

Consideriamo una superficie (x) riferita alle sue asintotiche u, v. Le coordinate normali di Wilczynski del punto x soddisfano ad un sistema di equazioni alle derivate parziali, completamente integrabile,

$$x^{20} + 2bx^{01} + c_1 x = 0,$$

$$x^{02} + 2ax^{10} + c_2 x = 0,$$

dove $a. b, c_1, c_2$ sono funzioni di u, v e dove noi scriviamo φ^{ik} invece di $\dfrac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \, \partial v^k}$ per maggiore semplicità tipografica.

Sulla iperquadrica di Klein di S_5, le tangenti asintotiche xx^{10}, xx^{01} sono rappresentate dai punti

$$U = | x\, x^{10} |, \; V = | x\, x^{01} |$$

e si ha

$$U^{10} + 2bV = 0. \qquad V^{01} + 2aU = 0.$$

Dunque, U, V sono trasformati Laplace l'uno dell'altro (Bompiani, Tzitzeica) ed appartengono ad una successione di Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V; V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

di cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

Poniamo

$$h_i = -(\log.\, bh_1 h_2 \cdots h_{i-1})^{11} + h_{i-1},$$

$$k_i = -(\log.\, ak_1 k_2 \cdots k_{i-1})^{11} + k_{i-1},$$

abbiamo

$$U_n^{01} = U_{n+1} + U_n (\log.\, bh_1 \cdots h_n)^{01}, \; U_n^{10} = h_n U_{n-1},$$

$$V_n^{10} = V_{n+1} + V_n (\log.\, ak_1 \cdots k_n)^{10}, \; V_n^{01} = k_n V_{n-1}.$$

La successione L è autopolare rispetto a Q: l'iperpiano polare di U_n è

$V_{n-2} V_{n-1} V_n V_{n+1} V_{n+2}$ e quello di V_n è $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$.

I piani $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ e $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ sono coniugati rispetto a Q e le sezioni di Q con questi piani rappresentano le due schiere rigate di una quadrica Φ_n. Abbiamo così una successione di quadriche $\Phi, \Phi_1, \cdots, \Phi_n, \cdots$, di cui la prima è la quadrica di Lie.

Due quadriche successive di questa successione si toccano in quattro punti, caratteristici per le due quadriche. Il punto x è è caratteristico della quadrica di Lie e conta per quattro. Le quadriche Φ, Φ_1 hanno in comune un quadrilatero sghembo: il quadrilatero di Demoulin.

2. Supponiamo che la superficie (x) sia una falda focale di una congruenza W di cui $(\bar{x})$ è la seconda falda focale. La retta j, generatrice della congruenza W, è rappresentata sopra Q da un punto J della retta UV. Si ha

$$J = \lambda U - \mu V.$$

Demoulin ha dimostrato che si può scegliere il fattore di proporzionalità di λ, μ in guisa di avere

$$\lambda^{01} + 2a\,\mu = 0 \;,\; \mu^{10} + 2b\,\lambda = 0 \,.$$

Ciò posto consideriamo uno spazio S_6 di cui S_5 è l'iperpiano $X_0 = 0$, poi, in questo spazio, il punto U' di cui le coordinate sono quelle di U e μ, ed il punto V' di cui le coordinate sono quelle di V e λ. Abbiamo

$$U'^{10} + 2bV' = 0 \;,\; V'^{01} + 2aU' = 0$$

ed i punti U', V' appartengono ad una successione di Laplace

$$\ldots, U'_n, \ldots, U'_1, U', V', V'_1, \ldots, V'_n, \ldots \qquad (L')$$

di cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

Si vede che L è la proiezione di L' dal punto $0_0(0,\ldots,0,1)$. Chiamamo J_n il punto di intersezione della retta $U'_{n-1}U'_n$ colla retta $U_{n-1}U_n$ e J_{-n} il punto di intersezione delle rette $V'_{n-1}V'_n$ e $V_{n-1}V_n$. Abbiamo così una successione di Laplace

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots \qquad (J)$$

di cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u, determinata dal punto J che, come si sa, descrive una rete coniugate alla congruenza (UV) (Darboux). Se noi poniamo

$$\mu_n = \mu_{n-1}^{01} - \mu_{n-1} (\log. bh_1 \cdots h_{n-1})^{01} \quad , \quad \mu_n^{10} = h_n \mu_{n-1} ,$$

$$\lambda_n = \lambda_{n-1}^{10} - \lambda_{n-1} (\log. ak_1 \cdots k_{n-1})^{10} \quad , \quad \lambda_n^{01} = k_n \lambda_{n-1} ,$$

abbiamo

$$J_n = \mu_{n-1} U_n - \mu_n U_{n-1} \quad , \quad J_{-n} = \lambda_{n-1} V_n - \lambda_n V_{n-1} .$$

Alla seconda falda focale $(\bar{x})$ della congruenza W è associata una successione di Laplace

$$\ldots , \bar{U}_n , \ldots , \bar{U}_1 , \bar{U} , \bar{V} , \bar{V}_1 , \ldots , \bar{V}_n , \ldots$$

circoscritta alla successione J.

Possiamo associare alla congruenza W una quarta successione di Laplace. L'iperpiano $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$ rappresenta il complesso lineare osculatore alla congruenza lungo la retta j. Indichiamo con P il polo di questo iperpiano rispetto a Q. Il punto P genera una rete coniugata ed appartiene ad una successione di Laplace

$$\ldots , P_n , \ldots , P_1 , P , P_{-1} , \ldots , P_{-n} , \ldots \qquad (\mathcal{P})$$

di cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

La successione $\mathcal{P}$ è circoscritta a L e $\bar{L}$. Si vede agevolmente che il punto P è l'intersezione delle rette $U\bar{U}$, $V\bar{V}$. Più generalmente, il punto P_n è l'intersezione delle rette $U_{n-1}\bar{U}_{n-1}$, $U_n \bar{U}_n$ ed il punto P_{-n} è l'intersezione delle rette $V_{n-1}\bar{V}_{n-1}$, $V_n \bar{V}_n$. Il punto P_n è il polo, rispetto a Q, dell'iperpiano $J_{-n-2} J_{-n-1} J_{-n} J_{-n+1} J_{-n+2}$ e P_{-n} quello dell'iperpiano $J_{n-2} J_{n-1} J_n J_{n+1} J_{n+2}$.

3. I piani $J_n J_{n+1} J_{n+2}$ e $P_{-n} P_{-n-1} P_{-n-2}$ sono coniugati rispetto a Q e tagliano questa iperquadrica secondo due coniche che rappresentano le due schiere rigate di una quadrica Ψ_n.

Del pari, alla coppia di piani $J_{-n} J_{-n-1} J_{-n-2}$ e $P_n P_{n+1} P_{n+2}$ corrisponde una quadrica Ψ_{-n}.

I piani $J_1 J J_{-1}$ e $P_1 P P_{-1}$ sono coniugati rispetto a Q e rappresentano una quadrica Ψ spezzata nei piani focali della retta j. Abbiamo così una successione di quadriche

$$\ldots , \Psi_n , \ldots , \Psi_1 , \Psi_0 , \Psi , \Psi_{-0} , \Psi_{-1} , \ldots , \Psi_{-n} , \ldots .$$

Si vede agevolmente che due quadriche successive si toccano in quattro punti che sono caratteristici per le due quadriche.

Nel caso delle quadriche Ψ_0, Ψ, si vede che la quadrica Ψ_0 tocca le superficie (x), $(\bar{x})$ nei fuochi della retta j. Del pari, anche la quadrica Ψ_{-0} tocca le stesse superficie negli stessi punti. In ambedue i casi, ognuno dei punti x, $\bar{x}$ conta per due punti caratteristici di Ψ_0, Ψ_{-0}.

Osserviamo che alla polarità rispetto al complesso lineare Σ osculatore alla congruenza (j) lungo j, corrisponde nello S_5 la omologia armonica di centro P e di iperpiano $J_2 J_1 J J_{-1} J_{-2}$. In questa omologia, i punti U e $\bar{U}$, V e $\bar{V}$ sono omologhi. I piani $UU_1 U_2$ e $\bar{U}\bar{U}_1 \bar{U}_2$ che hanno in comune la retta unita $J_1 J_2$, sono omologhi. Anche i piani $VV_1 V_2$ e $\bar{V}\bar{V}_1 \bar{V}_2$ sono omologhi. Abbiamo quindi il teorema di Demoulin: *Le quadriche di Lie delle superficie focali* (x), ($\bar{\text{x}}$) *di una congruenza* W *sono polari rispetto al complesso lineare osculatore alla congruenza.*

4. Associamo al punto x di (x) il tetraedro di Elia Cartan, cioè il tetraedro che ha comme vertici i punti di intersezione delle direttrici di Wilczynski colla quadrica di Lie. Questi vertici sono i punti x, y appartenenti alla prima direttrice ed i punti m, n appartenenti alla seconda. Un punto dello spazio ha coordinate della forma

$$z_1 x + z_2 m + z_3 n + z_4 y .$$

Rispetto a questo tetraedro, le quadriche Φ, Φ_1 hanno per equazioni

$$\Phi \equiv z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0 ,$$

$$\Phi_1 \equiv z_1^2 + \alpha z_2^2 + \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2 - \frac{\beta}{2a} (\log b^2 \beta)^{01} (z_1 z_4 + z_2 z_3) = 0 ,$$

dove

$$\alpha = 2(\log. a)^{20} + [(\log. a)^{10}]^2 + 4(b^{01} + c_1) ,$$

$$\beta = 2(\log. b)^{02} + [(\log. b)^{01}]^2 + 4(a^{10} + c_2) .$$

Notiamo che si ha la relazione

$$a\,\alpha\,(\log.\,a^2\,\alpha)^{10} = b\beta\,(\log.\,b^2\,\beta)^{01}\,.$$

Le quadriche $\Psi_0\,,\,\Psi_{-0}\,,\,\Psi_1\,,\,\Psi_{-1}$ hanno per equazioni

$$\Psi_0 \equiv \lambda\Phi + \mu(z_2^2 + \beta z_4^2) + 2\mu_1 z_2 z_4 + 2[\mu_2 + \mu_1\,(\log.\,bh_1)^{01}]z_4^2 = 0\,,$$

$$\Psi_{-0} \equiv \mu\Phi + \lambda(z_3^2 + \alpha z_4^2) + 2\lambda_1 z_3 z_4 + 2[\lambda_2 + \lambda_1\,(\log.\,ak_1)^{10}]z_4^2 = 0\,,$$

$$\Psi_1 \equiv 2a\mu\Phi_1 - 2[\mu_3 + \mu_2(\log.\,b^3 h_1^2 h_2)^{01} + \mu_1\beta_1]\Phi$$
$$+ 4a[\mu_2 + \mu_1(\log.\,bh_1)^{01}]\,(z_3^2 + \alpha z_4^2) + 4a\mu_1\,(\alpha z_2 z_4 - z_1 z_3) = 0\,,$$

$$\Psi_{-1} \equiv 2b\lambda\Phi_1 - 2\,[\lambda_3 + \lambda_2(\log.\,a^3\,k_1^2 k_2)^{10} + \lambda_1\alpha_1]\,\Phi$$
$$+ 4b\,[\lambda_2 + \lambda_1\,(\log\cdot ak_1)^{10}]\,(z_2^2 + \beta z_4^2) + bk_1(\beta z_3 z_4 - z_2 z_1) = 0\,,$$

dove

$$\alpha_1 = \alpha + (\log.\,ak_1)^{20} + (\log.\,ak_1)^{10}\,(\log.\,a^2\,k_1)^{10}\,,$$

$$\beta_1 = \beta + (\log.\,bh_1)^{02} + (\log.\,bh_1)^{01}\,(\log.\,b^2\,h_1)^{01}\,.$$

Sarebbe meglio di prendere come tetraedro mobile di riferimento un tetraedro rispetto al quale la superficie $(x)\,,\,(\bar{x})$ giocherebbero un ruolo simmetrico. Osserviamo che il prodotto delle polarità rispetto a $\Psi_0\,,\,\Psi_{-0}$ è una omografia speciale di cui i punti uniti sono i fuochi $x\,,\,\bar{x}$ di $j\,,\,i$ piani uniti i piani focali di j e che ha due rette unite

$$\frac{z_2}{\lambda\mu_1} = \frac{z_3}{\mu\lambda_1} = \frac{z_4}{-\lambda\mu}\,, \qquad (g_1)$$

$$\lambda\mu\,z_1 - \mu\lambda_1\,z_2 - \lambda\mu_1\,z_3 = 0\,,\; z_4 = 0\,. \qquad (g_2)$$

Possiamo prendere come tetraedro mobile di riferimento il tetraedro di cui i vertici sono i punti $x\,,\,\bar{x}$ ed gli ulteriori punti di intersezione di $g_1\,,\,g_2$ colle quadriche di Lie delle superficie $(x)\,,\,(\bar{x})$ rispettivamente. Se poniamo

$$L = \lambda_1^2 - \lambda\,[2\lambda_2 + 2\lambda_1\,(\log.\,a\,k_1)^{10} + 2\lambda]\,,$$

$$M = \mu_1^2 - \mu\,[2\mu_2 + 2\mu_1\,(\log.\,b\,k_1)^{01} + \beta\mu]\,,$$

le quadriche Ψ_0, Ψ_{-0} hanno per equazioni

$$\Psi_0 \equiv z_1 z_2 + M(z_2^2 - z_3^2) + z_3 z_4 = 0 .$$

$$\Psi_{-0} \equiv z_1 z_2 + L(z_3^2 - z_2^2) - z_3 z_4 = 0 ,$$

e le quadriche Φ, $\overline{\Phi}$,

$$\Phi \equiv (L - M) z_1 z_2 - LMz_3^2 - z_4^2 + (L + M) z_3 z_4 = 0 ,$$

$$\overline{\Phi} \equiv (L - M) z_3 z_4 - LMz_2^2 - z_1^2 + (L + M) z_1 z_2 = 0 .$$

5. Consideriamo adesso due congruenze W: (j'), (j''), avendo in comune una falda focale (x). Diciamo (x') la seconda focale di (j') e (x'') quella di (j'').

Esistono una infinità di punti della retta d comune ai piani tangenti alle superficie (x'), (x'') ed una infinità di punti della retta $d' = x' x''$ che si corrispondono mediante trasformazioni di Guichard (Bianchi). Se Indichiamo con u, v le asintotiche delle superficie (x), (x'), (x''), Demoulin ha dimostrato che le tangenti alle curve u negli punti corrispondenti delle rette d, d' generano una quadrica Δ_u. Del pari, le tangenti alle curve v negli stessi punti generano una quadrica Δ_v. Queste quadriche si toccano in quattro punti.

Vogliamo dimostrare che le due quadriche appartengono ad una successione di quadriche che si toccano in quattro punti, caratteristici per le quadriche.

Alle superficie (x), (x'), (x'') sono associate, al solito, nello spazio S_5, tre successioni di Laplace L,

$$\cdots , U'_n , \cdots , U'_1 , U' , V' , V'_1 , \cdots , V'_n , \cdots , \qquad (L')$$

$$\cdots , U''_n , \cdots , U''_1 , U' , V'' , V''_1 , \cdots , V''_n , \cdots \qquad (L'')$$

indichiamo con J', J'' i punti della retta UV che rappresentano le rette j', j'' e

$$\cdots , J'_n , \cdots , J'_n , J' , J'_{-1} , \cdots , J'_{-n} , \cdots , \qquad (J')$$

$$\cdots , J''_n . \cdots , J''_1 , J'' , J''_{-1} , \cdots , J''_{-n} , \cdots \qquad (J'')$$

le successioni di Laplace determinate dei punti J', J''.

Sia ancora

$$\ldots, P_n', \ldots, P_1', P', P_{-1}', \ldots, P_{-n}', \ldots, \qquad (\mathcal{P}')$$

$$\ldots, P_n'', \ldots, P_1'', P'', P_{-1}'', \ldots, P_{-n}', \ldots \qquad (\mathcal{P}'')$$

le successione di Laplace polare di J', J'' rispetto a Q.

Le rette $J' J_1'$, $J_1'' J''$ del piano $U_1 UV$ si tagliano in un punto A e le rette $J' J_{-1}'$, $J'' J_{-1}''$ del piano UVV_1 si tagliano in un punto B. Quando varia u, le rigate $(J' J_1')$, $(J'' J_1'')$ hanno rispettivamente come piani tangenti $J_1' J' J_{-1}'$, $J'' J_1'' J_{-1}''$, dunque la tangente in A alla curva u passa per B. Nello stesso modo, si vede che la tangente in B alla curve v passa per A. Quindi, i punti A, B sono trasformati di Laplace l'uno dell'altro.

Chiamiamo A_n l'intersezione delle rette $J_n' J_{n+1}'$, $J_n'' J_{n+1}''$ e B_n l'intersezione delle rette $J_{-n}' J_{-n-1}'$, $J_{-n}'' J_{-n-1}''$. Si vede che il punto A_{n+1} è il trasformato di Laplace di A_n nel senso delle v e B_{n+1} quello di B nel senso delle u. Abbiamo dunque una sucsione di Laplace

$$\ldots, A_n, \ldots, A_1, A, B, B_1, \ldots, B_n, \ldots \qquad (a)$$

di cui ogni pnnto è il trasformato del precedente nel senso delle u. Questa successione è iscritta nelle successioni J', J''.

Chiameremo A_n' il polo del iperpiano $A_{n-2} A_{n-1} A_n A_{n+1} A_{n+2}$ e B_n' il polo del iperpiano $B_{n-2} B_{n-1} B_n B_{n+1} B_{n+2}$. Questi punti appartengono ad una successione di Laplace

$$\ldots, B_n', \ldots, B_1', B', A', A_1', \ldots, A_n', \ldots \qquad (a')$$

di cui ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u. (Il punto A' è il polo di $A_2 A_1 A B B_1$, B' quello di $A_1 A B B_1 B_2$, ...).

La successione a' è circoscritta alle successioni $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}''$.

6. Consideriamo i piani $A_n A_{n+1} A_{n+2}$ e $A_n' A_{n+1}' A_{n+2}'$. Essi sono coniugati rispetto a Q e le sezioni di questa iperquadrica con questi piani rappresentano le due schiere rigate da una quadrica Δ_n

Osserviamo che il piano $A_n A_{n+1} A_{n+2}$ appartiene agli iperpiani

$$U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2} U_{n+3}, U_{n-1}' U_n' \cdots U_{n+3}', U_{n-1}'' U_n'' \cdots U_{n+3}'',$$

dunque il piano $A'_n A'_{n+1} A'_{n+2}$ non è altro che il piano $V_{n+1} V'_{n+1} V''_{n+1}$.

Nello stesso modo, alle sezioni di Q con i piani $B_n B_{n+1} B_{n+2}$ e $B'_n B'_{n+1} B'_{n+2}$ corrispondono le schiere rigate di una quadrica Δ_{-n}. Il piano $B'_n B'_{n+1} B'_{n+2}$ coincide col piano $U_{n+1} U'_{n+1} U''_{n+1}$.

Abbiamo così una successione di quadriche

$$\ldots, \Delta_n, \ldots, \Delta_1, \Delta_0, \Delta'_0, \Delta'_{-0}, \Delta_{-0}, \Delta_{-1}, \ldots, \Delta_{-n} \ldots.$$

Si vede agevolmente che due quadriche successive di questa successione si toccano in quattro punti che sono caratteristici per le due quadriche.

7. Fissiamo l'attenzione sulle quadriche Δ'_0 e Δ'_{-0}.

La quadrica Δ'_0 rappresenta le sezioni di Q con i piani BAA_1 e $B'A'A'_1$. Questo ultimo piano coincide col piano $VV'V''$. Dunque, la quadrica Δ'_0 contiene le tangenti alle curve v delle superficie (x), (x'), (x'') nei punti x, x', x'' e coincide colla quadrica Δ_v di Demoulin.

Del pari, la quadrica Δ'_{-0} coincide colla quadrica Δ_u di Demoulin.

La retta AB taglia Q in due punti che rappresentano le rette d, d'. Infatti, ognuno degli spazi a tre dimensioni $U_1 UVV_1$, $U'_1 U' V' V'_1$, $U''_1 U'' V'' V''_1$ taglia Q in due piani che rappresentano rispettivamente le stelle di rette di vertici x, x'. x'' ed i piani rigati tangenti alle superficie (x), (x'), (x'') nei punti x. x', x''.

Il punto P', seconda imagine del complesso lineare Σ' osculatore alla congruenza (j') lungo j', è l'intersezione delle rette UU', VV'. Il punto P'', seconda imagine del complesso lineare Σ'', osculatore alla congruenza (j'') lungo j'', è l'intersezione delle rette UU'', VV''. Quindi, i piani $UU'U''$ e $VV'V''$ hanno in comune la retta $P'P''$, che taglia Q nei punti che rappresentano le direttrici r, r' della congruenza comune a Σ', Σ''.

Le quadriche Δ'_{-0}, Δ'_{-0} hanno in comune le quattro rette d, d', r, r' e si toccano dunque in quattro punti che sono caratteristici per le due quadriche. Così è ritrovato e completato il teorema di Demoulin.

8. Tzitzeica e Demoulin hanno chiamato superficie R una falda focale comune a due congruenze W : (j), $(\bar{j})$ quando le rette j, $\bar{j}$ sono coniugate. Se (x) è una superficie R, nello spazio S_5 i punti J, $\bar{J}$ imagine delle rette $j, \bar{j}$ son coniugati rispetto ai punti U, V.

Abbiamo

$$J = \lambda U - \mu V,$$

con $\lambda^{01} + 2a\mu = 0$, $\mu^{10} + 2b\lambda = 0$, dunque

$$\bar{J} = \lambda U + \mu V$$

e, essendo ρ una funzione di u, v, dobbiamo avere

$$(\rho\lambda)^{01} - 2a\rho\mu = 0, \quad (\rho\mu)^{10} - 2b\rho\lambda = 0,$$

cioè

$$(\log.\ \rho\lambda^2)^{01} = 0, \quad (\log.\ \rho\mu^2)^{10} = 0.$$

Ne deduciamo

$$(\log.\ \lambda)^{11} = (\log.\ \mu)^{11}$$

e possiamo supporre, mediante cambiamento del parametro u e del parametro v, $\lambda = \mu$. Il punti $J = U - V$ e $\bar{J} = U + V$ devono soddisfare ad equazioni di Laplace.

Abbiamo

$$J^{11} = 2(2ab + a^{10})\ J - 2V\,(b^{01} - a^{10}),$$

$$\bar{J}^{11} = 2(2ab - a^{10})\ \bar{J} - 2V\,(b^{01} - a^{10})\,.$$

Dunque perchè (x) sia una supeficie R, occorre e basta che si abbia

$$a^{10} = b^{01}\,.$$

Esiste quindi una funzione $\theta(u,v)$ tale che $a = \theta^{01}$, $b \equiv \theta^{10}$. Si vede che le reti (J), $(\bar{J})$ sono a invarianti eguali, risultato dovuto a Tzitzeica. Si ha

$$A = U_1 + U(\log.\ b)^{01} + 2aV, \quad B = V_1 + V(\log.\ a)^{10} + 2bU$$

e

$$A^{10} = 2aB\,, \qquad B^{01} = 2bA\,.$$

La considerazione della successione di quadriche Δ può dare alcuni risultati sulle superficie R.

9. L'uso della rappresentazione nello spazio S_5 può dare anche risultati nello studio delle congruenze non *W*. Questo studio è stato oggetto di ricerche di O. Rozet.

Colle notazioni del principio, se la congruenze (j) non è *W*, si ha

$$\left(\frac{\lambda^{01} + 2b\mu}{\lambda}\right)^{10} \neq \left(\frac{\mu^{10} + 2b\lambda}{\mu}\right)^{01}.$$

Il punto J soddisfa a quattro equazioni alle derivate parziali del terzo ordine e le curve u, v, sulla superficie (J), sono caratterizzate delle seguente proprietà :
I piani osculatore alle curve u nei punti di una curva v toccano una stessa curva.
I piani osculatore alle curve v nei punti di una curva u toccano una stessa curva.

Sulla superficie (J), le curve u, v formano una griglia secondo la denominazione di B. Segre. Rozet ha potuto utilizzare le ricerche di Bompiani e di B. Segre sulla generalizzazione dei sistemi coniugati. Queste brevi indicazioni mostrano il grande interesse delle ricerche di O. Rozet.

Liegi, il 9 marzo 1956.

BIBLIOGRAFIA

L. Godeaux, *La théorie des surfaces et l'espace réglé*. Actualités scientifiques N. 138 (Paris, Hermann, 1934).

— *Sur la théorie des congruences W*. Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1954, pp. 1028-1037, 1955, pp. 343-345.

— *Alcune osservazioni sulle congruenze W*. Rendiconti del Seminario di Torino, 1953-1954, pp. 39-46.

— *Sulle congruenze W*. Rendiconti di Matematica, in corso di stampa.

— *Notice sur Alphonse Demoulin*. Annuaire de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 3-35). Ho dato, in queste pagine, un sunto delle ricerche del mio compianto amico e l'elenco delle sue pubblicazioni.

O. Rozet, *Recherches sur les congruences W*. Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége, 1935, pp. 16-31.

— *Recherches sur la Géométrie projective réglée différentielle*. Mémoires de la Soc. roy. des Sciences de Liége, 1935, pp. 1-95.

— *Sur les congruences non W de droites.* Colloque de Géométrie différentielle du Centre belge de Recherches mathématiques, 1951, pp. 205-215.

B. Segre, *Les systèmes conjugués de 2e espéce en involution ou grilles.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1928, pp. 1-46.

R. Calapso, *Intorno ad una trasformazione delle congruenze W.* Rend. Lincei, aprile 1927.

— *Riduzione della deformazione proiettiva ecc.* Ibidem, aprile 1928.

— *Intorno ad una trasformazione delle superficie R.* Ibidem, novembre 1928.