EXTRAIT DE *Mathesis*, Tome LXVI, année 1957, N° 7-8-9.

SUR LE LIEU DES DROITES DES SURFACES CUBIQUES D'UN FAISCEAU,

par LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liège.

Le lieu des droites des surfaces cubiques d'un faisceau est une réglée d'ordre 42 et de genre 70, passant onze fois par la courbe-base du faisceau et possédant une courbe double d'ordre 255.

1. Soit $|F|$ un faisceau de surfaces cubiques, en général dépourvues de points multiples et n'ayant pas, en un point de la courbe-base, même plan tangent. La base de ce faisceau est une courbe C, d'ordre 9, que nous supposerons irréductible ; elle est dépourvue de points singuliers.

Une droite r, appartenant à une surface F, est rencontrée en trois points par les autres surfaces du faisceau et est donc une trisécante de C. Le lieu des droites des surfaces F coïncide donc avec le lieu des trisécantes de C ; c'est une surface réglée R. Observons que C ne peut posséder de tétrasécante, car cette droite appartiendrait à toutes les surfaces F et la courbe C serait réductible.

Représentons une surface F sur un plan σ de telle sorte qu'aux sections planes de la surface correspondent les cubiques passant par six points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_6$. A la courbe C correspond dans σ une courbe d'ordre 9, passant trois fois par chacun des points $A_1, A_2, \ldots, A_6$. Cette courbe est de genre 10 et par conséquent *la courbe* C *est de genre dix.*

Projetons C d'un de ses points P sur un plan. Nous obtenons une courbe d'ordre 8 et de genre 10. Cette courbe possède par conséquent 11 points doubles et il y a donc 11 trisécantes de C passant par P. On en conclut que *la courbe* C *est multiple d'ordre onze pour la surface* R.

Une surface F ne peut rencontrer la surface R en dehors de C et de ses 27 droites. Par conséquent, *la surface* R *est d'ordre* 42.

2. Une trisécante r de C ne peut appartenir qu'à une seule surface F. Soit ϖ le plan tangent à R en un point P de r. Ce plan coupe la surface F suivant r et une conique et le plan ϖ touche la surface F aux points de rencontre de cette conique et de r. Inversement, le plan tangent à F en un point P′ de r est tangent à R en un point P. Entre les points P, P′ existe donc une correspondance (1, 2) et par conséquent, il y a trois points de r en lesquels les surfaces F et R ont même plan tangent. Ces trois points sont précisément les points d'appui de r sur C.

En effet, soient A un des points d'appui de r sur C et a la tangente à C en ce point. Le plan ar est tangent à F en A et c'est d'autre part un des onze plans tangents à R en A.

Cela étant, soit P un point de r, distinct des points d'appui de cette droite sur C. Supposons qu'en P, les surfaces F et R aient même plan tangent. Alors, la correspondance (1, 2) dont il vient d'être question est satisfaite identiquement et les surfaces F et R se raccordent le long de r. Il en résulte que dans l'intersection de F et de R, la droite r compte pour deux. La surface F contiendra au plus 26 droites.

La surface F satisfaisant à la condition qui vient de lui être imposée, représentons la sur un plan de manière qu'à ses sections planes correspondent des cubiques passant par six points. On peut toujours s'arranger pour que la droite r corresponde au domaine d'un de ces points. Dans ces conditions, la droite r comptant pour deux, les cubiques images des sections planes de F ont même tangente en ce point et la surface F possède un point double situé sur la droite r (1).

Si une surface F possède un point double O, elle contient six droites passant par ce point et se raccorde à la surface R le long de chacune de ces droites.

3. Nous allons montrer que le faisceau $|F|$ contient 32 surfaces ayant un point double.

Soit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) + \lambda\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation du faisceau $|F|$. Pour que le point x soit double pour une surface F, les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_4} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_4} = 0$$

doivent être compatibles, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f}{\partial x_3} & \dfrac{\partial f}{\partial x_4} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_4} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Les équations obtenues en supprimant la dernière colonne dans la matrice précédente représentent une courbe g d'ordre 12, qui est ren-

(1) Voir L. Godeaux, *Introduction à la Géométrie supérieure* (Liège, Thone, 1946), p. 128, n° 183.

contrée en 16 points par la courbe $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$. La surface $\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$ rencontre la courbe g en 48 points dont il faut défalquer les 16 points précédents, qui n'annulent pas tous les déterminants de la matrice donnée. On en conclut qu'il y a bien 32 surfaces du faisceau $|F|$ qui possèdent un point double.

4. Soient γ une section plane de R et x son genre. Les surfaces F découpent sur γ une série g^1_{27} possédant $2(27 + x - 1)$ points doubles [1]. En un de ces points, une surface F touche la courbe γ et a donc même plan tangent que la surface R. Les deux surfaces se raccordent donc le long de la génératrice de R passant par ce point. Or, ce raccordement ne peut se présenter que le long de six droites pour chacune des 32 surfaces F ayant un point double. On a donc

$$2(27 + x - 1) = 6.32.$$

d'où $x = 70$.

La surface réglée R *est de genre* 70.

5. Les points d'une surface F communs à deux droites de cette surface sont doubles pour la surface R. Celle-ci possède donc une courbe double Γ dont il s'agit de déterminer l'ordre y.

La courbe γ, d'ordre 42, possède neuf points multiples d'ordre 11 sur la courbe C et y points doubles sur la courbe Γ ; elle ne peut posséder d'autres points multiples, donc on a

$$\frac{1}{2}\, 41.40 - \frac{1}{2}\, 9.11.10 - y = 70,$$

donc $y = 255$.

La courbe double Γ *de la surface* R *est d'ordre* 255.

6. Une surface F sans point double possède 27 droites et il existe 135 points communs à deux de ces droites. Donc une surface F rencontre la courbe Γ, en dehors de C, en 135 points. On en conclut que *la courbe* Γ *s'appuie en* 630 *points sur la courbe* C.

Considérons une surface F, soit F_0, ayant un point double O. La surface F_0 contient six droites passant par O et 15 droites ne passant pas par ce point. Il y a 105 points simples de F_0 communs à deux de

---

[1] Voir p. e. L. Godeaux, *Géométrie algébrique*, t. II (Liège, Thone et Paris, Masson, 1949), p. 26, n° 294.

ces 21 droites. Cela étant, soit z le nombre des points d'intersection de la courbe Γ et de F_0 absorbés en O. On a

$$z = 3.255 - 630 - 105 = 30.$$

Observons qu'une droite de R rencontre en général Γ en dix points, car une droite d'une surface cubique sans point double est rencontrée par dix autres droites de la surface. Par contre, une droite r de F_0 passant par le point O ne rencontre plus Γ qu'en cinq points en dehors de O.

Par le point O passent six droites de R, donc ce point est sextuple pour cette surface. Considérons la courbe γ section de la surface R par un plan passant par O. Cette courbe a le genre 70, car elle est en correspondance birationnelle avec une section plane quelconque de R. Elle possède neuf points multiples d'ordre 11 sur C et un point sextuple O, donc elle rencontre encore la courbe Γ, en dehors de O, en 240 points. Il en résulte que O est multiple d'ordre 15 pour Γ. Comme la surface F_0 a un point double en O, on en conclut que cette surface ne touche pas la courbe Γ en ce point et on a bien $z = 2.15 = 30$.

Un point double pour une surface cubique du faisceau $|F|$ *est multiple d'ordre six pour la surface* R *et d'ordre* 15 *pour la courbe* Γ.