Extrait de « Mathesis », t. LXVII, nos 1-2-3, 1958.

SUR LE SYSTÈME JACOBIEN D'UN SYSTÈME LINÉAIRE DE SURFACES ALGÉBRIQUES,

par Lucien Godeaux,

Professeur à l'Université de Liège.

Un système linéaire de surfaces algébrique, $|F|$, non composé au moyen d'un faisceau de surfaces ou d'une congruence linéaire de courbes, peut avoir des surfaces fondamentales de deux espèces. Une surface fondamentale de première espèce contient un faisceau de courbes fondamentales et une surface F du système la rencontre suivant un nombre fini de courbes fondamentales. Une surface fondamentale de seconde espèce n'est pas rencontrée en des points variables par les surfaces F et les surfaces F qui passent par un point d'une telle surface la contiennent. Les surfaces fondamentales appartiennent au système jacobien $|F_j|$ de $|F|$, celles de première espèce comme composantes simples, celles de seconde espèce comme composantes doubles. Ces propriétés sont bien connues ; nous établirons ici la seconde par un procédé élémentaire, en démontrant que si les surfaces d'un système linéaire triplement infini passant par un point ont même plan tangent en ce point, celui-ci est double pour la jacobienne du système.

1. Considérons un système linéaire $|F|$, de dimension trois, de surfaces algébriques F, non composé au moyen d'un faisceau de surfaces ni d'une congruence linéaire de courbes. (Dans ces cas, la jacobienne du système $|F|$ est indéterminée).

La jacobienne F_j de $|F|$ est le lieu des points tels que les surfaces F passant par ce point y ont une tangente commune. Si en un point P, les ∞^2 surfaces F passant par ce point y ont un plan tangent commun, le point P appartient à la jacobienne F_j ; nous allons démontrer qu'il est précisément double pour cette surface.

Représentons par $\alpha_i(x_1, x_2, x_3)$, $\beta_i(x_1, x_2, x_3)$, $\gamma_i(x_1, x_2, x_3)$, $\delta_i(x_1, x_2, x_3)$ des formes algébriques de degré i en x_1, x_2, x_3. Supposons qu'au point O_4, n'appartenant pas à la base de $|F|$, les surfaces F passant par ce point y aient un plan tangent fixe $\alpha_1(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Soit n l'ordre des surfaces F. Le système $|F|$ est déterminé par quatre surfaces linéairement indépendantes dont nous écrirons les équations sous la forme

$$x_4^{n-1}\alpha_1 + x_4^{n-2}\alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0,$$
$$x_4^{n-1}\alpha_1 + x_4^{n-2}\beta_2 + \dots + \beta_n = 0,$$
$$x_4^{n-1}\alpha_1 + x_4^{n-2}\gamma_2 + \dots + \gamma_n = 0,$$
$$x_4^n\delta_0 + x_4^{n-1}\delta_1 + \dots + \delta_n = 0.$$

La jacobienne F_j est une surface d'ordre $4n - 4$ dont nous écrirons l'équation sous la forme du déterminant habituel égalé à zéro, les termes d'une ligne contenant les dérivées premières d'un même polynome par rapport à x_1, x_2, x_3, x_4. Ordonnons l'équation par rapport aux puissances décroissantes de x_4.

Le coefficient du terme en x_4^{4n-4} est identiquement nul.

Le coefficient du terme en x_4^{4n-5} contient le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & 0 \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & 0 \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & 0 \\ \frac{\partial \delta_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \delta_1}{\partial x_3} & n\delta_0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

et deux déterminants analogues dont nous n'écrirons que la première ligne

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} & 0 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Le premier déterminant se réduit à

$$n\delta_0 \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \end{vmatrix}.$$

Les mineurs de ce nouveau déterminant relatifs aux éléments de la première colonne sont identiquement nuls, donc le déterminant (1) est nul. Il en est de même des déterminants (2).

Il reste un terme dans le coefficient de x^{4n-5}, c'est le déterminant

$$(n-1) \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \alpha_1 \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & \alpha_1 \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} & \alpha_1 \\ \frac{\partial \delta_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \delta_1}{\partial x_3} & \delta_1 \end{vmatrix}$$

qui est identiquement nul.

Le coefficient de x_4^{n-6} peut s'écrire

$$n\delta_0\left[\frac{\partial(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} + \frac{\partial(\alpha_2, \beta_1, \gamma_2)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} + \frac{\partial(\alpha_2, \beta_2, \gamma_1)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}\right] +$$

$$2(n-1)\left|\alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_1} \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_2} \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_3}\right|$$

et n'est pas nul en général. Donc :

si les surfaces algébriques d'un système linéaire triplement infini passant par un point ont même plan tangent en celui-ci, ce point est double pour la jacobienne du système.

2. Supposons que le système $|F|$ possède une surface fondamentale de seconde espèce Φ, c'est-à-dire une surface qui n'est pas rencontrée en des points variables par les surfaces F.

Les surfaces F passant par un point de Φ contiennent cette surface comme partie et ont donc même plan tangent en ce point. Il en résulte que tous les points de Φ sont doubles pour la jacobienne F_j, c'est-à-dire que Φ est une composante double de F_j.

Cette propriété peut d'ailleurs s'établir autrement. Le système linéaire $|F|$ peut être représenté par l'équation

$$\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3) + \lambda_4 f_4 = 0.$$

L'équation de la jacobienne est

$$\varphi^3 \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

$$+ \varphi^2 \left[f_1 \frac{\partial(\varphi, f_2, f_3, f_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} + f_2 \frac{\partial(f_1, \varphi, f_3, f_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} + f_3 \frac{\partial(f_1, f_2, \varphi, f_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}\right] = 0.$$

La surface $\varphi = 0$ est donc bien une composante double de la jacobienne F_j.

Considérons maintenant un système linéaire $|F|$, de dimension $r \geqslant 3$, possédant une surface fondamentale Φ de seconde espèce. On sait que le système jacobien $|F_j|$ de $|F|$ comprend toutes les surfaces d'ordre $4n-4$ se comportant aux points-base de $|F|$ comme les jacobiennes des systèmes triplement infinis tirés de $|F|$.

Un système linéaire triplement infini tiré de $|F|$ a une jacobienne F_j qui contient deux fois la surface Φ, donc cette surface est une composante double du système jacobien $|F_j|$ de $|F|$.

Liège, le 12 *février* 1958.