SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI GENERI $p_a = p_g = 0$ CON UN FASCIO DI CURVE BICANONICHE IRRIDUCIBILI

LUCIEN GODEAUX (Liegi)

Quando G. Castelnuovo ricercava le condizione di razionalità di una superficie algebrica ($p_a = p_2 = 0$), egli e F. Enriques hanno costruito superficie non razionali di generi $p_a = p_g = 0$. Così era postata la questione di determinare le superficie regolare, non razionale, sprovviste di curva canonica. Alcuni esempi hanno stato dati da F. Enriques, da L. Campedelli e da noi (1). Recentemente, P. Burniat ha dato nuovi esempi.

Le superficis in questione formano due categorie:

1°) Superficie di cui i sistemi bicanonici e pluricanonici sono composti con uno fascio di curve ellittiche.

2°) Superficie di cui le curve bicanoniche sono irriducibili.

La prima superficie di Enriques è una superficie del sesto ordine passante doppiamente per i spigoli di uno tetraedro. Si ha $P_2 = 1$ e la curva bicanonica è di ordine zero. Enriques ha dimostrato che questa superficie era l'imagine di una involuzione del secondo ordine, senza punti uniti, appartenente ad una superficie di cui tutti i generi sonto uguali a l'unità ($p_a = p_4 = 1$).

Nel 1931, abbiamo costruito una superficie di generi $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, con uno fascio di curve bicanoniche irriducibili. Questa superficie è l'immagine di una involuzione ciclica del quinto ordine, senza punti uniti, appartenente ad una superficie di generi $p_a = p_g = 4$. Essa è del settimo ordine ed ha come rette doppie tacnodale i spigoli di uno quadrilatero sghembe (e passa semplicemente per le diagonale di questo quadrilatero). Le curve bica-

---

(1) Per la bibliografia, vedere il nostro opuscolo *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls*. Actualités scien., N° 123 (Paris, Hermann, 1934).

noniche sono tagliate dalle quadriche passante per le rette del quadrilatero e le curve tricanoniche sono le sezioni piane.

Recentemente, abbiamo potuto dimostrare che una superficie di generi $p_a = p^g = 0$ con un fascio di curve bicanoniche irriducibili, è una trasformata birazionale della superficie di cui sopra, sotto l'ipotesi che le quattro punti-base del fascio bicanonico sono distinti (2). Il nosciolo della questione è la dimostrazione della esistenza di una curva sei-canonica che sia formata di tre curve bicanoniche e di due curve tricanoniche. Vogliamo dare qui un sunto della nostra dimostrazione.

1. — Consideriamo una superficie algebrica F, di generi aritmetica p_a e geometrico p_g uguale a zero, con un fascio di curve bicanoniche irriducibili, Il genere lineare $p^{(1)} = P_2 = 2$ e le curve bicanoniche hanno dunque il genere quattro e loro fascio ha quattro punti-base.

Diciamo $|C_2|$ il fascio bicanonico, $|C_3|$ il sistema tricanonico, di dimensione tre, $|C_4|$ il sistema tetracanonico, di dimensione sei, $|C_6|$ il sistema sei-canonico, di dimensione $P_6 - 1 = 15$.

Nel sistema $|C_4|$, non possono esistere curve riducibili in una tricanonica ed in una canonica, ma possono esistere curve riducibili in due curve bicanoniche. Queste curve sono ∞^2, dunque nel sistema $|C_4|$ esistono ∞^3 curve non riducibili in due curve bicanoniche. Diciamo $\overline{C}_4$ queste curve, esse formano un sistema lineare $|\overline{C}_4|$.

Nel sistema $|C_6|$ vi sono curve formate di una curva $\overline{C}_4$ e di una curva C_2. Per quattro punti della superficie F passano quattro curve $\overline{C}_4 + C_2$, dunque la dimensione minima del sistema lineare contenente le curve $\overline{C}_4 + C_2$ è almeno eguale a cinque. Ne risulta che vi sono al più ∞^9 curve C_6 che non sono riducibili in una curva $\overline{C}_4$ e in una curva C_2. Diciamo $\overline{C}_6$ queste curve.

Fra le curve $\overline{C}_6$ sono curve formate di tre curve C_2 e curve

(2) *Sur les surfaces de genres géométiques et arithmétiques nuls possédaat un faisceau de caurbes bicanoniques irréductibles* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique. 1958, pp. 718-729).

formate di curve C_3. Le prime sono ∞^3, gli altri ∞^6, quindi esiste almeno uua curva $\overline{C}_6$ riducibile da un lato in tre curve C_2, dell' altro lato in due curva C_3. Diciamo C_6^* questa curva.

2. — L' esistenza della curva C_6^* non è possibile che se le curve C_2 e C_3 che compongono questa curva sono riducibili in curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$. Precisamente, conto tenuto della non-esistenza della curva canonica, due casi sono possibili.

1⁰) Esistono sopra F sei curve $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_6$. Le tre curve bicanoniche sono $\Gamma_1+\Gamma_2$, $\Gamma_3+\Gamma_4$, $\Gamma_5+\Gamma_6$ e le due curve tricanoniche $\Gamma_1+\Gamma_3+\Gamma_5$, $\Gamma_2+\Gamma_4+\Gamma_6$.

2⁰) Esistono sopra F quattro curve Γ_1, $\Gamma_2, \Gamma_3 . \Gamma_4$. Le tre eurve bicanoniche sono la curva $\Gamma_1+\Gamma_2$ contata due volte e la curva $\Gamma_3+\Gamma_4$. Le due curve tricanoniche sono $2\Gamma_1+\Gamma_3$, $2\Gamma_2+\Gamma_4$.

In ambidue i due casi, le curve Γ sono isolate, poichè le curve Γ_2 sono irriducibili.

3. — Consideriamo il primo caso. Essendo il sistema tricanonico l' aggiunto del sistema $|C_2|$, abbiamo

$$\Gamma_1'+\Gamma_2\equiv\Gamma_2+\Gamma_4+\Gamma_6\,,\quad \Gamma_1'\equiv\Gamma_4+\Gamma_6$$

e nello stesse modo,

$$\Gamma_2'\equiv\Gamma_3+\Gamma_5\,,\ \Gamma_3'\equiv\Gamma_6+\Gamma_2\,,\ \Gamma_4'\equiv\Gamma_5+\Gamma_1\,,\ \Gamma_5'\equiv\Gamma_2+\Gamma_4\,,$$
$$\Gamma_6'\equiv\Gamma_1+\Gamma_3\,.$$

Se noi diciamo π_i et n_i il genere e il grado di Γ_i, n_{ik} il numero dei punti comuni a Γ_i, Γ_k, abbiamo, dal teorema di Riemann-Roch,

$$n_i=\pi_i-1$$

e poi

$$n_{12}=n_{34}=n_{56}=1,\ \pi_1+\pi_2=\pi_3+\pi_4=\pi_5+\pi_6=4\,.$$

La curva Γ_i' esiste, dunque si ha $\pi_i\geqq 1$.

Da

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 \equiv \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6 ,$$

si tra

$$\pi_1 = n_{13} + n_{14} = n_{15} + n_{16} , \quad \pi_3 = n_{13} + n_{23} = n_{35} + n_{36} ,$$

$$\pi_5 = n_{15} + n_{25} = n_{35} + n_{45} .$$

$$\pi_2 = n_{23} + n_{24} = n_{25} + n_{26} , \quad \pi_4 = n_{14} + n_{24} = n_{45} + n_{46} ,$$

$$\pi_6 = n_{16} + n_{36} + n_{46} .$$

Di altra parte, abbiamo

$$2\pi_1 - 2 = n_{14} + n_{16} , \quad 2\pi_3 - 2 = n_{23} + n_{56} , \quad 2\pi_5 - 2 = n_{25} + n_{45} ,$$

$$2\pi_2 - 2 + n_{23} + n_{25} , \quad 2\pi_4 - 2 = n_{44} + n_{45} , \quad 2\pi_6 - 2 = n_{16} + n_{36} .$$

Si ne deduce agevolmente $n_{ik} = 1$, $n_i = 1$ $\pi_i = 2$,

Consideriamo le curve $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$. I quattro punti comuni a queste curve sono i punti-base di $| C_2 |$ e sono per ipotesi distinti. Diciamo A_{ik} il punto comune a Γ_i , Γ_k .

La curva $\Gamma_5 + \Gamma_6$ passa per questi quattro punti. Supponiamo che Γ_5 passa per A_{14} , A_{23} e Γ_6 per i punti A_{13} , A_{24} . Il gruppo $A_{13} + A_{14}$ è tagliato sopra Γ_1 dalla curva $\Gamma'_1 = \Gamma_4 + \Gamma_6$ è dunque un gruppo canonico di Γ_1 . Questo gruppo è anche tagliato dalla curva $\Gamma'_2 = \Gamma_3 + \Gamma_5$ è un gruppo paracanonico. Abbiamo dunque un assurdo e la curva Γ_5 passa per A_{13} , A_{24}, la curva Γ_6 per A_{14}, A_{23} . Se noi consideriamo il gruppo $A_{16} + A_{23}$ sulla curva Γ_6 , abbiamo nello stesso modo un assurdo.

Il primo caso è quindi da escludere.

4. — Nel secondo caso, abbiamo

$$\Gamma'_1 = \Gamma_2 + \Gamma_4 , \quad \Gamma'_2 = \Gamma_1 + \Gamma_3 , \quad \Gamma_8 = 2\Gamma_2 , \quad \Gamma'_4 = 2\Gamma_1$$

e, come nel primo,

$$n_i = \pi_i - 1 , \quad n_{12} = n_{34} = 1 , \quad \pi_1 + \pi_2 = \pi_3 + \pi_4 = 4 .$$

La curva $\Gamma'_1 = \Gamma_2 + \Gamma_4$ taglia Γ_1 in $2\pi_1 - 2$ punti, dunque la curva Γ_4 taglia Γ_1 in $2\pi_1 - 3$. Questo numero deve essere positivo, dunque $\pi_1 \gtreqless 2$. Nello stesso modo, si ha $\pi_2 \gtreqless 2$ e quindi $\pi_1 = \pi_2 = 2$. Abbiamo allora $n_1 = n_2 = 1$, $n_{14} = n_{23} = \rho_{13} = n_{21} = 1$.

La curva $\Gamma_3' = 2\,\Gamma_2$ taglia sopra Γ_3 un gruppo canonico, di due punti, quindi si ha $\pi_3 = 2$ e $\pi_4 = 2$.

La considerazione delle serie tagliate sopra Γ_1, Γ_2. Γ_3. Γ_4 rispettivamente dei sistemi $|2\,\Gamma_3|$, $|2\,\Gamma_4|$, $|\Gamma_1 + \Gamma_4|$, $|\Gamma_3 + \Gamma_3|$ mostra che questi sistemi coincidono cogli aggiunti $|\Gamma_1'|$, $|\Gamma_2'|$, $|\Gamma_3'|$, $|\Gamma_4'|$.

Il sistema tricanonico $|C_3|$ è determinato dalle curve $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$, $2\Gamma_3 + \Gamma_2$, $2\Gamma_4 + \Gamma_1$.

5. — Rapportiamo proiettivamente le curve C_3 agli piani dello spazio e diciamo φ_1. φ_2, φ_3, φ_4 i piani che corrispondono alle curve $2\Gamma_1 + \Gamma_3$, $2\Gamma_2 + \Gamma_4$, $2\Gamma_3 + \Gamma_2$, $2\Gamma_4 + \Gamma_1$. Alla superficie F corrisponde una superficie F' di ordine sette e agli punti comuni alle curve Γ_1, Γ_2 e Γ_3, Γ_4 corrispondono rette eccezionali a_{12}, a_{34}.

Le rette $a_1 = (\varphi_1, \varphi_4)$, $a_2 = (\varphi_2, \varphi_3)$, $a_3 = (\varphi_3, \varphi_1)$, $a_4 = (\varphi_4, \varphi_2)$ sono doppie per la superficie F'. Il piano φ_1 incontra questa superficie nella retta doppia a_1 contata due volte, nella retta doppia a_3 contata due volte, nella retta doppia a_3 e nella retta semplice a_{12}. La retta a_1 è dunque retta doppia tacnodale per F', la retta doppia infinitamente vicina essendo nel piano φ_1.

Le rette doppie a_2, a_2, a_4 sono anche doppie tacnodale per F', essendo le rette doppie infinitamente vicine rispettivamente nei piani φ_2, φ_3, φ_4.

Se noi prendiamo il tetraedro $\varphi_1\varphi_3\varphi_3\varphi_4$ come figure di riferimento, l'equazione della superficie F' si scrive

$$a_1x_1^4x_2^2x_4 + a_2x_2^4x_1^2x_3 + a_3x_3^4x_4^2x_1 + a_4x_4^4x_3^2x_2 +$$
$$+ x_1x_2x_3x_4(b_1x_1^2x_2 + b_2x_2^2x_1 + b_3x_3^2x_4 + b_4x_4^2x_3 +$$
$$+ c_1x_2x_3x_4 + c_2x_3x_4x_1 + c_3x_4x_1x_2 + c_4x_1x_2x_3) = 0\,.$$

Questa superficie è l'immagine della involuzione di ordine cinque generata dalla omografia

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1 : \varepsilon^3 x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon x_4\,,$$

dove ε è una radice primitiva d'ordine cinque dell'unità, sulla superficie

$$a_1 x_1^5 + a_5 x_2^5 + a_3 x_3^e + a_4 x_4^5 + a_4 x_4^5 + b_1 x_1^3 x_4 x_3 + b_2 x_2^3 x_1 x_4 +$$

$$b_3 x_a^3 x_1 x_4 + b_4 x_4^3 x_1 x_3 + c_1 x_2 x_2 x_4 + c_2 x_3 x_4 x_1 + c_2 x_4 x_1 x_2 + c_4 x_1 x_2 x_3 = 0 .$$

I coefficienti a_1 , a_2 , a_3 , a_4 non possono nulli.

Si ha così il teorema seguente:

Una superficie algebrica di generi $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$, *con curve bicanoniche irriducibili, è birazionalmente equivalente a l'immagine di una involuzione ciclica di ordine cinque, senza punti uniti, appartenente ad una superficie di generi* $p_a = p_g = 4$.