Structure de quelques points de diramation de surfaces multiples cycliques

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

(Deuxième note)

Dans cette seconde note (*), nous étudions un point de diramation d'une surface multiple d'ordre 41. Le point est triple pour la surface, le cône tangent étant formé de trois plans (σ_α), (τ_β), (σ_β), le second rencontrant les deux autres chacun suivant une droite, mais le premier et le dernier ne se rencontrant pas en dehors du point triple. A ce point sont infiniment voisins, sur la droite commune à (σ_α), (τ_β) un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un second point double biplanaire ordinaire. Au point triple est infiniment voisin, sur la droite commune aux plans (τ_β), (σ_β), un point double biplanaire auquel est infiniment voisin un point double conique.

Le point de diramation est équivalent à dix courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha,\ \rho_{11},\ \rho_{21},\ \rho_{22},\ \rho_{12},\ \tau_\beta,\ \omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \sigma_\beta,$$

de degré virtuel — 2 sauf τ_β, qui est de degré virtuel — 3. Chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

Lorsque l'on considère la suite des systèmes linéaires $|C'|$, $|C''|$, ... sur la surface F contenant l'involution dont la surface multiple est l'image, systèmes dont les courbes ont des multiplicités croissantes au point uni A considéré, le système $|C'|$ fait apparaître σ_α, τ_β, τ_β, le second fait apparaître ρ_{11} et ρ_{12}. Les autres courbes apparaissent une par une par les systèmes suivants.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre 41 ne possédant qu'un nombre fini de points

(*) La première note a paru dans ce *Bulletin*, 1955, pp. 303-312

Comme Φ_3 est la projection de Φ_2 à partir du point A_2', qui représente τ_β, la courbe τ_β apparaîtra sur Φ_3, c'est-à-dire que les courbes C''' passeront par le point $(\beta, 1, 4)$. La somme des multiplicités des courbes C''' aux points $(\beta, 1)$ $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 4)$ doit être égale à 12, donc les courbes C''' passent au plus deux fois par $(\beta, 1, 4)$.

Supposons que les courbes C''' passent une fois par $(\beta, 1, 4)$, donc une fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 3)$ et huit fois par $(\beta, 1)$. Alors, elles passent sept fois par $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$, cinq fois par $(\beta, 4)$, deux fois par $(\beta, 4, 1)$ et par $(\beta, 4, 1, 1)$, une fois par $(\beta, 4, 1, 2)$ $(\beta, 4, 1, 2, 1)$. Le point A_2' est double pour Φ_2, mais d'autre part le point A absorbe 11×41 points d'intersection de deux courbes C'''. La surface Φ_3 serait donc d'une part d'ordre $n - 7$, d'autre part d'ordre $n = 11$, ce qui est absurde. Les courbes C''' passent donc deux fois par $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 4)$, quatre fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 12)$, une fois par $(\beta, 13)$, $(\beta, 13, 1)$.

Le point A_2' est triple pour la surface Φ_2 et la surface Φ_3 est d'ordre $n - 8$. Sur cette surface se trouvent la droite ρ_{11}, qui représente le domaine du point $(\alpha, 14, 1)$, la conique τ_β qui représente le domaine de $(\beta, 1, 4)$ et la droite ω_2, qui représente le domaine du point $(\beta, 13, 1)$. La droite ρ_{11} et la conique τ_β se coupent en un point A_3' qui représente ρ_{12}. La droite ω_2 rencontre τ_β en un point et contient d'autre part un point (singulier pour la surface), qui représente σ_β.

5. Les courbes $C^{(4)}$ correspondent à la solution $\lambda_4 = 7$, $\mu_4 = 8$. Elles passent 15 fois par A et ne peuvent plus passer par le point $(\alpha, 14, 1)$. Elles ne peuvent plus passer deux fois par le point $(\beta, 1, 4)$, de sorte que Φ_4 est la projection de Φ_3 à partir de A_3'. On en conclut que la courbe ρ_{12} apparaît sur Φ_4, c'est-à-dire que les courbes $C^{(4)}$ passent par le point $(\alpha, 2, 4)$. Elles ne peuvent d'ailleurs passer qu'une fois par ce point puisque l'on a $\mu_4 = 8$.

Les courbes $C^{(4)}$ passent 15 fois par A, huit fois par $(\alpha, 1)$, quatre fois par $(\alpha, 2)$, une fois par $(\alpha, 2, 1)$,..., $(\alpha, 2, 4)$, trois fois par $(\alpha, 3)$,..., $(\alpha, 6)$, deux fois par $(\alpha, 7)$, une fois par $(\alpha, 7, 1)$ et $(\alpha, 7, 1, 1)$, trois fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 4)$, deux fois par $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 12)$, une fois par $(\beta, 13)$, $(\beta, 13, 1)$.

Le point A_3' est double pour Φ_3 et la surface Φ_4 est d'ordre $n - 10$.

Sur la surface Φ_4 sont tracées une droite ρ_{21} représentant le domaine du point $(\alpha, 7, 1, 1)$, une droite ρ_{12} représentant le domaine du point $(\alpha, 2, 4)$, et rencontrant ρ_{21} en un point, une droite τ_β représentant $(\beta, 1, 4)$, rencontrant ρ_{12} en un point A_4', une droite ω_2, représentant $(\beta, 13, 1)$, rencontrant τ_β en un point.

6. Les courbes $C^{(5)}$ correspondent à la solution $\lambda_5 = 2$, $\mu_5 = 14$. Elles passent 16 fois par A, deux fois par $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 12)$, une fois par $(\beta, 13)$, $(\beta, 13, 1)$. Elles ne peuvent plus passer par $(\alpha, 2, 4)$, donc Φ_5 est la projection de Φ_4 à partir de A_4'.

Les courbes $C^{(5)}$ passent huit fois par $(\alpha, 1)$, trois fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 6)$, deux fois par $(\alpha, 7)$, une fois par $(\alpha, 7, 1)$, $(\alpha, 7, 1, 1)$ cinq fois par $(\alpha, 1, 1)$, une fois par $(\alpha, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 2, 1), \ldots, (\alpha, 1, 2, 4)$.

Le point A_4' est simple pour la surface Φ_4 et Φ_5 est d'ordre $n - 11$. Sur la surface Φ_5 sont tracées une droite ρ_{21}, correspondant à $(\alpha, 7, 1, 1)$, une droite exceptionnelle ρ' correspondant à $(\alpha, 1, 2, 4)$ et une droite ω_2 correspondant au point $(\beta, 13, 1)$. Les droites ρ_{12} et ρ' se rencontrent en un point et les droites ρ' et ω_2 se rencontrent en un point A_5'.

7. Les courbes $C^{(6)}$ correspondent à la solution $\lambda_6 = 18$, $\mu_6 = 3$. Elles passent 26 fois par A, trois fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 6)$, deux fois par $(\alpha, 7)$, une fois par $(\alpha, 7, 1)$ et $(\alpha, 7, 1, 1)$. Elles ne peuvent plus passer par $(\alpha, 1, 2, 4)$ ni par $(\beta, 13, 1)$. Il en résulte que la surface Φ_6 est la projection de Φ_5 à partir de A_5'.

Le point A_5' représente la courbe τ_β, par conséquent les courbes $C^{(6)}$ doivent passer par le point $(\beta, 1, 4)$.

Un raisonnement analogue à celui qui a été fait pour les courbes C''' montre que les courbes $C^{(6)}$ passent six fois par $(\beta, 1)$, trois fois par $(\beta, 1, 1), \ldots, (\beta, 1, 4)$, trois fois par $(\beta, 2), \ldots, (\beta, 5)$, deux fois par $(\beta, 6)$, une fois par $(\beta, 6, 1)$ et $(\beta, 6, 1, 1)$.

Le point A_5' est quadruple pour la surface Φ_5 et Φ_6 est d'ordre $n - 15$.

Sur la surface Φ_6 se trouvent une droite ρ_{21} correspondant au point $(\alpha, 7, 1, 1)$, une cubique gauche τ_β correspondant au point $(\beta, 1, 4)$, coupant ρ_{21} en un point A_6', une droite ω_1 correspondant au point $(\beta, 6, 1, 1)$ et rencontrant τ_β en un point.

8. Les courbes $C^{(7)}$ correspondent à la solution $\lambda_7 = 13$, $\mu_7 = 9$. Elles passent 22 fois par A et ne peuvent plus passer par le point (α, 7, 1, 1), ni trois fois par le point (β, 1, 4). Il en résulte que la surface Φ_7 est la projection de Φ_6 à partir de A_6'.

On voit facilement que les courbes $C^{(7)}$ passent cinq fois par (β, 1), deux fois par (β, 1, 1), . . . , (β, 1, 4), trois fois par (β, 2), . . . , (β, 5), deux fois par (β, 6), une fois par (β, 6, 1), (β, 6, 1, 1).

Le point A_6' représentant la courbe ρ_{12}, les courbes $C^{(7)}$ doivent passer par le point (α, 2, 4) et elles ne peuvent passer qu'une fois par ce point, car la somme des multiplicités des courbes en (α, 2), (α, 2, 1), . . . , (α, 2, 4) ne peut excéder 9 et la multiplicité de (α, 2) est supérieure à celle de (α, 2, 1). On en conclut que les courbes $C^{(7)}$ passent neuf fois par (α, 1), cinq fois par (α, 2), une fois par (α, 2, 1), . . . , (α, 2, 4), quatre fois par (α, 3), une fois par (α, 4), (α, 4, 1), . . . , (α, 4, 3).

Le point A_6' est double pour Φ_6 et la surface Φ_7 est d'ordre $n - 17$.

Sur la surface Φ_7 se trouvent tracées une droite ρ_{22} représentant le domaine du point (α, 4, 3), une droite ρ_{12} représentant (α, 2, 4) et rencontrant ρ_{22} en un point, une conique τ_β rencontrant ρ_{12} en un point A_7' et une droite ω_1, rencontrant τ_β en un point.

9. Les courbes $C^{(8)}$ sont données par la solution $\lambda_8 = 8$, $\mu_8 = 15$. Ces courbes ne peuvent plus passer qu'une fois par le point (β, 1, 4) et on voit aisément qu'elles ne peuvent plus passer par le point (α, 2, 4) mais qu'elles passent encore par le point (α, 4, 3). D'une manière précise, les courbes $C^{(8)}$ passent 23 fois par A, neuf fois par (α, 1), quatre fois par (α, 2), (α, 3), une fois par (α, 4), (α, 4, 1), (α, 4, 2), (α, 4, 3), cinq fois par (α, 1, 1), une fois par (α, 1, 2), (α, 1, 2, 1), . . . , (α, 1, 2, 4), quatre fois par (β, 1), trois fois par (β, 2), . . . , (β, 5), deux fois par (β, 6), une fois par (β, 6, 1), (β, 6, 1, 1), une fois par (β, 1, 1), . . . , (β, 1, 4).

La surface Φ_8 est la projection de Φ_7 à partir de A_7' et est d'ordre $n - 18$. Elle contient une droite ρ_{22} correspondant à (α, 4, 3), une droite exceptionnelle ρ', correspondant à (α, 1, 2, 4), rencontrant ρ_{22}, une droite τ_β correspondant à (ρ, 1, 4), rencontrant ρ' en un point A_8', enfin une droite ω_1 correspondant à (β, 6, 1, 1), rencontrant τ_β.

10. Les courbes $C^{(9)}$ correspondant à $\lambda_9 = 3$, $\mu_9 = 21$. Elles passent 24 fois par A et ne peuvent plus passer par (β, 1, 4). Elles passent huit fois par (α, 1), quatre fois par (α, 2), (α, 3), une fois par $(\alpha, 4)$, $(\alpha, 4, 1)$, $(\alpha, 4, 2)$ et $(\alpha, 4, 3)$, quatre fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, $(\alpha, 1, 3)$, une fois par $(\alpha, 1, 4)$, $(\alpha, 1, 4, 1)$, $(\alpha, 1, 4, 2)$, $(\alpha, 1, 4, 3)$, trois fois par $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 5)$, deux fois par $(\beta, 6)$, une fois par $(\beta, 6, 1)$, $(\beta, 6, 1, 1)$.

La surface Φ_9 est la projection de Φ_8 à partir de A_8' et est d'ordre $n - 19$. Cette surface contient une droite ρ_{22} correspondant au point $(\alpha, 4, 3)$, une droite exceptionnelle ρ'' correspondant au point $(\alpha, 1, 4, 3)$ et une droite ω_1 homologue du point $(\beta, 6, 1, 1)$. La droite ρ'' rencontre ρ_{22} et ω_1, cette dernière en un point A_9'.

11. Les courbes $C^{(10)}$ sont données par $\lambda_{10} = 24$, $\mu_{10} = 4$. Elles passent 28 fois par A et ne peuvent plus passer par $(\beta, 6, 1, 1)$ ni par $(\alpha, 1, 4, 3)$. Il en résulte que les courbes $\Gamma^{(10)}$ sont découpées sur Φ_9 par les hyperplans passant par A_9'. Ce point représente τ_β. On observera que les courbes $C^{(10)}$ ne peuvent passer plus de quatre fois par $(\beta, 1, 4)$. Finalement, on trouve que ces courbes passent quatre fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, une fois par $(\alpha, 4)$, $(\alpha, 4, 1)$, $(\alpha, 4, 2)$, $(\alpha, 4, 3)$, huit fois par $(\beta, 1)$, quatre fois par $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 4)$, quatre fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2)$, et $(\beta, 3, 3)$.

La surface Φ_{10}, projection de Φ_9 à partir de A_9', est d'ordre $n - 24$; elle contient une droite ρ_{22} homologue de $(\alpha, 4, 3)$, une quartique rationnelle τ_β homologue de $(\beta, 1, 4)$, rencontrant ρ_{22} en un point A_{10}', enfin une droite ω_0, représentant le domaine du point $(\beta, 3, 3)$, rencontrant τ_β en un point.

12. L'étude des courbes $C^{(11)}$, $C^{(12)}$, ... ne conduira plus qu'à l'introduction de droites exceptionnelles. Nous nous bornerons à indiquer les multiplicités de ces courbes au point A et aux points unis de première espèce qu'elles contiennent, ainsi que l'ordre de la surface Φ_i correspondante.

Courbes $C^{(11)}$. A^{29}, $(\alpha, 2. 4)^2$, $(\beta, 1, 4)^3$, $(\beta, 3, 3)^1$. La surface Φ_{11} est d'ordre $n - 26$.

Courbes $C^{(12)}$. A^{30}, $(\alpha, 2, 4)^1$, $(\alpha, 1, 2, 4)^1$, $(\beta, 1, 4)^2$, $(\beta, 3, 3)^1$. La surface Φ_{12} est d'ordre $n - 27$.

Courbes $C^{(13)}$. A^{31}, $(\alpha, 2, 4)^1$, $(\alpha, 1, 4, 3)^1$, $(\beta, 1, 4)^1$, $(\beta, 3, 3)^1$. La surface Φ_{13} est d'ordre $n - 28$.

Courbes $C^{(14)}$. A^{32}, $(\alpha, 2, 4)^1$, $(\alpha, 1, 7, 1, 1)^1$, $(\beta, 3, 3)^1$. La surface Φ_{14} est d'ordre $n - 29$. Au domaine du point $(\alpha, 1, 7, 1, 1)$ correspond une droite exceptionnelle ρ'''.

Courbes $C^{(15)}$. A^{35}, $(\alpha, 2, 4)^1$, $(\beta, 1, 4)^6$. La surface Φ_{15} est d'ordre $n - 35$.

Courbes $C^{(16)}$. A^{36}, $(\alpha, 1, 2, 4)^1$, $(\beta, 1, 4)^5$. Φ_{16} est d'ordre $n - 36$.

Courbes $C^{(17)}$. A^{37}, $(\alpha, 1, 4, 3)^1$, $(\beta, 1, 4)^4$. Φ_{17} est d'ordre $n - 37$.

Courbes $C^{(18)}$. A^{38}, $(\alpha, 1, 7, 1, 1)^1$, $(\beta, 1, 4)^3$. Φ_{18} est d'ordre $n - 38$.

Courbes $C^{(19)}$. A^{39}, $(\alpha, 1, 14, 1)^1$, $(\beta, 1, 4)^2$. Φ_{19} est d'ordre $n - 39$.

Courbes $C^{(20)}$. A^{40}, $(\alpha, 1, 34)^1$, $(\beta, 1, 4)^1$. Φ_{20} est d'ordre $n - 40$.

Aux domaines des points $(\alpha, 1, 14, 1)$, $(\alpha, 1, 34)$ correspondent des courbes exceptionnelles respectivement sur Φ_{19} et Φ_{20}.

Les courbes $C^{(21)}$ ont en A un point multiple d'ordre 41 à tangentes variables.

13. D'après ce qui précède, le point A' est équivalent à dix courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha, \ \rho_{11}, \ \rho_{21}, \ \rho_{22}, \ \rho_{12}, \ \tau_\beta, \ \omega_0, \ \omega_1, \ \omega_2, \ \sigma_\beta,$$

de degré virtuel -2 sauf τ_β, qui est de degré virtuel -3. Chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

On a

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_\alpha + \rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \tau_\beta + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \sigma_\beta,$$

$$\Gamma \equiv \Gamma'' + \sigma_\alpha + 2(\rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12}) + \tau_\beta + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \sigma_\beta,$$

$$\Gamma \equiv \Gamma''' + \sigma_\alpha + 2(\rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \tau_\beta + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2) + \sigma_\beta,$$

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(4)} + \sigma_\alpha + 2\rho_{11} + 3(\rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12}) + 2(\tau_\beta + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2) + \sigma_\beta,$$

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(6)} + \sigma_\alpha + 2\rho_{11} + 3(\rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \tau_\beta + \omega_0 + \omega_1) + 2\omega_2 + \sigma_\beta,$$

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(7)} + \sigma_\alpha + 2\rho_{11} + 3\rho_{21} + 4(\rho_{22} + \rho_{12}) + 3(\tau_\beta + \omega_0 + \omega_1) + 2\omega_2 + \sigma_\beta,$$

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(10)} + \sigma_\alpha + 2\rho_{11} + 3\rho_{21} + 4(\rho_{22} + \rho_{12} + \tau_\beta + \omega_0) + 3\omega_1 + 2\omega_2 + \sigma_\beta,$$

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(11)} + \sigma_\alpha + 2\rho_{11} + 3\rho_{21} + 4\rho_{22} + 5\rho_{12} + 4(\tau_\beta + \omega_0) + 3\omega_1 + 2\omega_2 + \sigma_\beta, \ldots$$

Sur la surface Φ_1, le point A_1' est double biplanaire et il possède un point double biplanaire ordinaire infiniment voisin. Le point A_1'' est double biplanaire et possède un point double ordinaire infiniment voisin.

14. Les courbes Γ'' mettent en évidence le fait que A_1' est biplanaire. Pour mettre en évidence le point double biplanaire infiniment voisin, considérons les courbes Γ_0'' telles que

$$\Gamma \equiv \Gamma_0'' + \sigma_\alpha + 2\rho_{11} + 3(\rho_{21} + \rho_{22}) + 2\rho_{12} + \tau_\beta + \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \sigma_\beta.$$

Les courbes qui correspondent sur F à ces courbes passent une fois par les points (α, 7, 1, 1) et (α, 4, 3), donc elles passent une fois par (α, 7, 1), deux fois par (α, 7), trois fois par (α, 5), (α, 6), une fois par (α, 4, 2), (α, 4, 1), quatre fois par (α, 4), sept fois par (α, 1), (α, 2), (α, 3), une fois par (β, 1), ..., (β, 33), huit fois par A; ce sont donc des courbes C'' particulières.

Considérons maintenant les sections hyperplans Γ_0' de Φ_1, passant par le point A_1''. Elles sont données par

$$\Gamma \equiv \Gamma_0' + \sigma_\alpha + \rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \tau_\beta + 2(\omega_0 + \omega_1 + \omega_2) + \sigma_\beta.$$

Les courbes qui correspondent à ces courbes sur F passent une fois par les points (β, 13, 1), (β, 3, 3). On en conclut qu'elles passent sept fois par A, une fois par (α, 1), ..., (α, 34), six fois par (β, 1), (β, 2), trois fois par (β, 3), une fois par (β, 3, 1), (β, 3, 2), (β, 3, 3), deux fois par (β, 4), ..., (β, 12), une fois par (β, 13) et par (β, 13, 1).

Pour mettre en évidence le point double infiniment voisin, considérons les courbes Γ_1' données par

$$\Gamma \equiv \Gamma_1' + \sigma_\alpha + \rho_{11} + \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{12} + \tau_\beta + 2\omega_0 + 3\omega_1 + 2\omega_2 + \sigma_\beta.$$

Les courbes qui correspondent sur F aux courbes Γ_1' passent deux fois par le point (β, 6, 1, 1), donc deux fois par (β, 6, 1), quatre fois par (β, 6), six fois par (β, 5), ..., (β, 1), une fois par (α, 1), ..., (α, 31) et sept fois par A.

Liège, le 16 décembre 1955.