Lucien Godeaux

SUR UN POINT DE DIRAMATION D'UNE SURFACE MULTIPLE EN LEQUEL LE CONE TANGENT SE DECOMPOSE EN QUATRE PARTIES

Dans des travaux antérieurs, nous avons étudié les involutions cycliques d'ordre premier, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique et nous avons développé cette théorie dans un mémoire en cours d'impression dans les Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique (¹).

Désignons par F la surface contenant l'involution, par p l'ordre de celle-ci et par T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution.

Un point uni est dit de première espèce si, dans son domaine du premier ordre, T détermine l'identité; il est dit de seconde espèce si T détermine dans ce domaine une involution d'ordre p. Nous étendons ces dénominations aux points infiniment voisins d'un point uni.

Soit O un point uni de seconde espèce; il possède deux points unis dans son domaine du premier ordre et dans celui-ci, l'invo-

(¹) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* « Actualités scient. », N° 270, Paris, Hermann, 1935); *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* « Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique », 1938; *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation.* « Annales Scient. de l'Ecole Norm. Sup. », 1938, pp. 193-222; *Le points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Idem., 1948, pp. 189-210); *Détermination des singularités d'une surface multiple en certains points de diramation* (Idem., 1950, pp. 1-13); *Sur certaines surfaces multiples n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation.* « Annali di Matematica », 1949, 4ᵉ série, t. 28, pp. 89-106; *Sur les points unis isolés des surfaces multiples.* « Bull. de l'Acad. roy. de Belgique », 1949, pp. 15-30, 270-284, 285-292, 532-541, 636-641-828-833, 834-840; *Mémoire sur les surfaces multiples.* « Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique », 1952, pp. 1-30.

lution déterminée par T peut être représentée par

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \varepsilon^{a-1} \mu ,$$

où $\bar{\varepsilon}$ est une racine primitive d'ordre p de l'unité et a un entier compris entre 1 et p. Il existe un nombre β, compris entre 1 et p, tel que si l'on pose $\eta = \varepsilon^{a-1}$, on ait $\eta^{\beta-1} = 1$.

Cela ètant, soient λ_1, μ_1 deux entiers positifs satisfaisant à la congruence

$$\lambda + a\mu \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } p)$$

tels que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ soit la plus petite possible. Les nombres λ_1, μ_1 satisfont également à la congruence

$$\mu + \beta\lambda \equiv 0 , \qquad (\text{mod. } p)$$

Nous avons par conséquent

$$\lambda_1 + a\mu_1 = hp , \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = h'p .$$

Nous classons les points unis de seconde espèce en trois catégories suivant que:

1) h et h' sont tous deux égaux à l'unité.
2) Un seul des nombres h, h' est égal à l'unité.
3) Les deux nombres h, h' sont supérieurs à l'unité.

Soit Φ une surface image de l'involution, telle que le point de diramation O' homologue de O soit isolé. Nous avons démontré que si O est de la première catégorie, le cône tangent à Φ en O' se scinde en deux cônes rationnels; si O est un point de la seconde catégorie, le cône tangent en O' se scinde en trois cônes rationnels; enfin si O est de la troisième catégorie, le cône tangent se scinde en quatre cônes rationnels.

Dans le mémoire en cours d'impression cité plus haut, nous avons indiqué la méthode qui permet d'étudier dans chaque cas la structure du point uni O et de déterminer le cône tangent à la surface Φ en O'. Dans ce travail, nous étudions un point de la troisième catégorie, où nous avons $p = 10n + 1$, $a = 6n + 1$, $\beta = 5n + 3$, $h = 2$, $h' = n$, l'entier n étant choisi de telle sorte que p soit premier.

Après avoir rappelé au début un certain nombre de résultats que nons avons établis antérieurement, nous montrons que le *point de diramation O' est multiple d'ordre $n+2$ pour la surface Φ, le cône tangent se décomposant en trois plans* $(\sigma_1), (\tau_1), (\sigma_2)$ *et en un cône rationnel* (τ_2) *d'ordre $n-1$. Le cône tangent présente trois droites doubles: l'une commune aux plans* $(\sigma_1), (\tau_1)$, *la seconde commune au plan* (τ_1) *et au cône* (τ_2), *la troisième commune au cône* (τ_2) *et au plan* (σ_2).

Ce résultat appelle un complément: Projetons Φ de de O' sur un hyperplan de l'espace ambiant et soit Φ_1 la surface obtenue. Au domaine du point O' correspond sur cette surface un ensemble de trois droites $\sigma_1, \tau_1, \sigma_2$ et d'une courbe rationnelle τ_2 d'ordre $n-1$. Il faut encore établir la multiplicité, pour Φ_1, des trois points communs aux droites σ_1 et τ_1, à la droite τ_1 et à la courbe rationnelle τ_2, à la courbe τ_2 et à la droite σ_2. On démontre que dans le cas actuel ces points sont simples et que, par conséquent, *la surface Φ ne possède ancun point double dans le domaine du point O'.*

1. - Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I, d'ordre premier $p = 10n+1$ n'ayant qu'un nombre fini de points unis. En supposant p premier, nous excluons certaines valeurs de n; en particulier, n ne peut être de la forme $3z+2$. Soit T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution I.

Construisons sur F un système linéaire $|C|$, transformé en lui-même par T, contenant p systèmes linéaires $|C_0|, |C_1|, \dots, |C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I, le premier étant dépourvu de point-base. On sait que l'on peut toujours choisir $|C|$ de telle sorte que les dimensions r de $|C|$ et r_0 de $|C_0|$ soient aussi grandes qu'on le veut.

Rapportons projectivement les courbes C aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions; nous obtenons une surface que nous désignerons encore par F, sur laquelle T est déterminée par une homographie de période p possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$, dont le premier seul rencontre F, aux points unis de l'involution. Les courbes C_i sont découpées sur F par les hyperplans passant par les axes de l'homographie T, sauf par σ_i.

L'espace σ_0 a la dimension r_0. Projetons F de l'espace linéaire de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$, sur σ_0. Nous obtenons une surface Φ dont les points correspondent aux groupes de l'involution I, c'est-à-dire une image de cette involution.

Soit ε une racine primitive d'ordre p de l'unité. A chaque axe de l'homographie T, nous pouvons attacher une racine d'ordre p de l'unitè. Nous supposerons qu'aux axes $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{p-1}$ sont respectivement attachées les racines $1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{p-1}$.

2. - Considérons un point uni O de l'involution et supposons que le plan tangent à F en ce point ne rencontre pas l'axe σ_0 en dehors de O. Ce plan est uni pour l'homographie T et s'appuie donc soit suivant une droite sur l'un des axes $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{p-1}$, soit suivant un point sur deux de ces axes. Nous nous placerons dans le second cas. On peut toujours supposer que l'un des axes d'appui est σ_1, quitte à changer de notation; nous désignerons l'autre axe d'appui par σ_α, où $\alpha = 6n + 1$. Soit O_1 le point d'appui du plan tangent en O sur σ_1, O_α le point d'appui sur σ_α.

Dans le faisceau des tangentes en O à F, T détermine une homographie cyclique ayant pour droites unies OO_1, OO_α.

Nous désignerons par C_0' les courbes C_0 passant par O. Elles ont en ce point la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 tangentes étant confondues avec OO_1 et μ_1 avec OO_α. Désignons ensuite par C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en O une droite distincte de OO_1, OO_α. Ces courbes ont en O la multiplicité $\lambda_2 + \mu_2$, λ_2 tangentes étant confondues avec OO_1, μ_2 avec OO_α. Et ainsi de suite.

Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C_0'|, \quad |C_0''|, \quad ..., \quad |C_0^{(i)}|, \quad ...$$

de dimensions $r_0 - 1, r_0 - 2, ..., r_0 - i, ...$ Nous désignons par $\lambda_i + \mu_i$ la multiplicité de O pur les courbes $C_0^{(i)}$, par λ_i le nombre des tangentes à ces courbes en O confondues avec OO_1, par μ_i celui des tangentes confondues avec OO_α. On a

$$\lambda_1 + \mu_1 < \lambda_2 + \mu_2 < ... < \lambda_i + \mu_i < ...$$

Nous avons montré que l'on a $i \leq 5n$. Pour $i = 5n + 1$, les courbes $C_0^{(5n+1)}$ ont la multiplicité p et des tangentes variables en O.

Rappelons que les courbes C_1, qui passent simplement par O en y touchant OO_a, rencontrent les courbes C_0', C_0'', ... en p points confondus en O. En particulier, elles rencontrent les courbes C_0' en une suite de $\alpha-1$ points infiniment voisins successifs de O, que nous désignerons par $(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, \alpha-1)$.

De même, les courbes C_a, qui passent simplement par O en y touchant OO_1, rencontrent les courbes C_0', C_0'', ... en p points confondus en O.

Si nous posons $\eta = \varepsilon^a$, il existe un entier β, compris entre 1 et p, tel que $\eta^\beta = \varepsilon$. On a actuellement $\beta = 5n + 3$.

Les courbes C_a rencontrent les courbes C_0' en une suite de $\beta-1$ points infiniment voisins successifs de O, que nous désignerons par $(2, 1), (2, 2), \ldots, (2, \beta-1)$.

Rappelons encore qu'un point uni, propre ou non, est dit de première espèce si T détermine l'identité dans son domaine du premier ordre. Il est dit de seconde espèce si T détermine une involution (d'ordre p et cyclique) dans ce domaine; dans ce cas, il existe deux points unis dans le domaine du premier ordre du point considéré.

Les points des deux suites précédentes sont unis de seconde espèce, sauf les deux derniers: $(1, \alpha-1), (2, \beta-1)$, qui sont unis de première espèce.

3. — Les nombres λ, μ satisfont aux congruences

$$\lambda + (6n+1)\mu \equiv 0\,, \quad \mu + (5n+3)\lambda \equiv 0\,, \quad (\text{mod. } p) \qquad [1]$$

Pour étudier la structure du point uni O, c'est-à-dire la distribution des points unis dans le voisinage de O, et pour déterminer en même temps la singularité de la surface Φ au point de diramation $O' \equiv O$, il faut tout d'abord déterminer les solutions de ces congruences en nombres entiers positifs, telles que

$$\lambda + \mu < p\,.$$

Ces solutions doivent être au nombre de $5n$.

On trouve sans peine les solutions

$$1) \qquad \lambda = 2n - 2t - 1\,, \quad \mu = 5t + 3\,,$$

pour $t = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

2) $$\lambda = 4n - 2t\,, \qquad \mu = 5t + 1\,,$$

pour $t = 0, 1, 2, ..., 2n-1$.

3) $$\lambda = 6n - 2t - 1\,, \quad \mu = 5t + 4\,,$$

pour $t = 0, 1, 2, ...$ jusqu'au plus grand entier contenu dans $1/3$ $(4n-2)$.

4) $$\lambda = 8n - 2t\,, \qquad \mu = 5t + 2\,,$$

pour $t = 0, 1, 2, ...$ jusqu'au plus grand entier contenu dans $1/3$ $(2n-1)$.

Observons que p étant premier, est de la forme $3z$ ou $3z+1$. Si $n = 3z$, les solutions de la troisième catégorie sont au nombre de $4z$ et celle de la quatrième catégorie au nombre de $2z$, donc en tout $6z = 2n$. Si $n = 3z+1$, on trouve respectivement les nombres $4z+1$ et $2z+1$, donc en tout $6z+2 = 2n$.

D'autre part, les solutions de la première et de la seconde catégories sont respectivement en nombres n et $2n$. On trouve donc bien toutes les solutions cherchées.

Nous devons ranger ces solutions dans l'ordre des valeurs croissantes des sommes $\lambda + \mu$. Les premières valeurs de ces sommes sont données par les solutions de la première catégorie, pour t satisfaisant à l'inégalité

$$3t < 2n - 1\,.$$

On a donc

$$\lambda_1 = 2n - 1\,,\ \mu_1 = 3;\quad \lambda_2 = 2n - 3,\ \mu_2 = 8;\quad \lambda_3 = 2n - 5\,,\ \mu_3 = 13; \ldots$$

4. - Les courbes C_0' ont donc la multiplicité $2n+2$ en O et, en ce point, $2n-1$ tangentes confondues avec OO_1 et trois avec OO_a.

Nous avons

$$\lambda + (6n+1)\,\mu = 2p\,, \quad \mu + (5n+3)\,\lambda = np\,,$$

donc, comme nous l'avons établi dans la théorie générale, le point O est, sur les courbes C_0', l'origine de branches superlinéaires passant les unes par le point $(1, 1)$ et contenant un point fixe P_1 uni de première espèce, les autres par le point $(2, 1)$ et contenant un point fixe uni de première espèce P_2.

Pour déterminer ces branches, reprenons le raisonnement qui nous a conduit à ce résultat. Les courbes C_0' doivent passer trois fois par les points $(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, x)$, y fois par le point $(1, x+1)$ et z fois par les points $(1, x+2), \ldots, (1, \alpha-1)$. Les courbes C_1 rencontrant les courbes C_0' en p points confondus en O, on doit avoir

$$\lambda_1 + \mu_1 + 3x + y + (\alpha - 2 - x)\, z = p\,,$$

c'est-à-dire

$$2n + 2 + 3x + y + (6n - 1 - x)\, z = 10n + 1\,.$$

On a nécessairement $z = 1$ et la relation devient

$$2x + y = 2n\,,$$

d'où, puisque $1 < y < 3$, $x = n - 1$ et $y = 2$.

Le point O est donc, sur les courbes C_0', l'origine d'une branche superlinéaire passant par les points $(1, 1), \ldots, (1, n-1), (1, n)$ et simplement par un point infiniment voisin de ce dernier, que nous désignerons par $(1, n, 1)$. C'est le point P_1 de tantôt.

De même, les courbes C_0' passent $2n-1$ fois par les points $(2, 1), (2, 2), \ldots, (2, x')$, y' fois par le point $(2, x'+1)$ et z' fois par les points $(2, x'+2), \ldots, (2, \beta-1)$. On doit avoir

$$\lambda_1 + \mu_1 + x'(2n-1) + y' + (\beta - 2 - x')\, z' = p\,.$$

On trouve encore $z' = 1$ et la relation

$$(2n-2)\, x' + y' = 3n - 2\,,$$

d'où $x' = 1$, $y' = n$. Dans ces conditions, les courbes C_0' passent $n-1$ fois par un point $(2, 2, 1)$, infiniment voisin de $(2, 2)$. C'est le point que nous avions désigné par P_2.

Désignons par $\Gamma_0^{(i)}$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $C_0^{(i)}$. Les sections hyperplanes passant par le point de diramation O' sont les courbes Γ_0'.

Projetons Φ du point O' sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0'. Aux domaines des points unis de première espèce $(1, \alpha - 1), (2, \beta - 1), (1, n, 1), (2, 2, 1)$ correspondent sur Φ_1 des courbes rationnelles que nous désignerons par $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2$ (les notations σ_1, σ_2 n'ont évidemment rien de commun avec les notations utilisées pour désigner les axes de l'homographie T et qui ne nous seront plus nécessaires). Les courbes C_0' passant une fois par les points $(1, \alpha - 1), (2, \beta - 1), (1, n, 1)$ et $n - 1$ fois par $(2, 2, 1)$, $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1$ sont des droites et τ_2 une courbe d'ordre $n - 1$.

Rappelons que nous avons établi que σ_1 rencontre τ_1 en un point, que τ_1 rencontre τ_2 en tn point et que τ_2 rencontre σ_2 en un point. Ces courbes n'ont ancun point commun en dehors des trois précédents.

Le cône tangent à Φ au point O' est la projection à partir de O des quatre courbes précédentes. On en conclut que O est multiple d'ordre $n + 2$ pour Φ.

Si nous désignons par m l'ordre de la surface Φ et par π le genre de ses sections hyperplanes, la surface F est d'ordre pm et les courbes C ont le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Dans l'intersection de deux courbes C_0', le point O absorbe $(n + 2)p$ intersections, par conséquent la surface Φ_1 est d'ordre $m - n - 2$, en accord avec le résultat précédent. Le genre des sections hyperplanes Γ_0' est, d'aprés la formule de ZEUTHEN, égal à $\pi - n - 1$.

Le point de diramation O' est multiple d'ordre $n + 2$ pour la surface Φ; le cône tangent à cette surface en ce point se scinde en trois plans $(\sigma_1), (\sigma_2), (\tau_1)$ et en un cône rationnel (τ_2) d'ordre n—1.

Le plan (τ_1) rencontre le plan (σ_1) et le cône (τ_2) chacun suivant une droite; le plan (σ_2) rencontre le cône (τ_2) suivant une droite. Le cône tangent à Φ en O n'a que ces trois droites doubles.

5. - Envisageons les courbes C_0''. On a $\lambda_2 = 2n - 3$, $\mu_2 = 8$.

Observons que pour $\lambda = 4n$, $\mu = 1$, on obtient des courbes C_0^* passant par le point $(1, \alpha - 1)$. Ce point appartendra donc à toutes les courbes $C_0^{(i)}$ pour lesquelles on aura $\lambda_i + \mu_i \leq 4n + 1$.

De même, pour $\lambda = 1$, $\mu = 5n - 2$, on obtient des courbes C_0^* passant par le point $(2, \beta - 1)$. Les courbes $C_0^{(i)}$ pour lesquelles on a $\lambda_i + \mu_i \leq 5n - 1$ passeront toutes par ce point.

Il en résulte que les courbes C_0'' passant par les points

$(1, \alpha-1)$, $(2, \beta-1)$, ne peuvent plus passer par le point $(1, n, 1)$ et ne peuvent plus passer que $n-2$ fois par le point $(2, 2, 1)$. Par conséquent, les courbes Γ_0'' qui correspondent sur Φ_1 aux courbes C_0'' sont découpées par les hyperplans passant par le point O_1' commun aux courbes τ_1, τ_2.

Le point O_1', qui correspond à une droite double du cône tangent à Φ en O, peut être simple ou double pour la surface Φ_1; nous montrerons qu'il est simple en calculant les degrés des systèmes $|C_0^{(i)}|$ et en particulier de celui de ces systèmes qui correspond aux valeurs $\lambda = 4n$, $\mu = 1$. Mais auparavant, nous ferons une remarque.

Les branches d'origine O des courbes C_0'' passant par le point $(2, 1)$ ont nécessairement le comportement représenté par le schema ma

$$0^{2n+5},\ (2,1)^{2n-3},\ (2,2)^{n-1},\ (2,3)^1,\ \ldots,\ (2,\beta-1)^1.$$
$$(2,2,1)^{n-2},$$

où les points sont rangés dans l'ordre où on les rencontre en partant de O et où leurs multiplicités sont indiquées par les exposants.

Plus généralement, les branches d'origine O des courbes $C_0^{(i)}$ correspondant à la solution $\lambda_i = 2n - 2t - 1$, $\mu_i = 5t + 2$ et passant par $(2, 1)$, ont un comportement représenté par le schéma

$$0^{2n+3t+2},\ (2,1)^{2n-2t-1},\ (2,2)^{n-t},\ (2,3)^1,\ \ldots,\ (2,\beta-1)^1.$$
$$(2,2,1)^{n-t-1}.$$

Nous avons vu que l'ou doit considérer les solutions de la première categorie tant que $3t$ reste inférieur à $2n-1$. Pour poursuivre notre recherche, nous devons considérer séparément les cas où l'on a $n = 3z$ et $n = 3z + 1$. C'est ce que nous allons faire.

6. - Supposons donc $n = 3z$, d'où $t \leq 2z - 1$. Nous avons

$$\lambda_{2z} = 2z + 1\,, \qquad \mu_{2z} = 10z - 2\,;$$
$$\lambda_{2z+1} = 12z\,, \qquad \mu_{2z+1} = 1\,;$$
$$\lambda_{2z+2} = 2z - 1\,, \quad \mu_{2z+2} = 10z + 3\,.$$

Les courbes $C_0^{(2z+1)}$ passent simplement par les points $(1, 1)$, $(1, 2), \ldots, (1, \alpha-1)$.

Les courbes $C_0^{(2z)}$ passent $2z+1$ fois par $(2, 1)$, $z+1$ fois par $(2, 2)$ et z fois par le point $(2, 2, 1)$. Les courbes $C_0^{(2z+2)}$ passent $2z-1$ fois par $(2, 1)$, z fois par $(2, 2)$ et $z-1$ fois par $(2, 2.1)$. Il en résulte que les courbes $C_0^{(2z+1)}$ passent z fois ou $z-1$ fois par $(2, 2, 1)$.

Sur les courbes $C_0^{(2z+1)}$, le point O est certainement l'origine de branches superlinéaires passant par le point $(2, 1)$ mais non par le point $(2, 2, 1)$. Supposons en premier lieu que les courbes $C_0^{(2z+1)}$ passent z fois par $(2, 2, 1)$ et plus d'une fois par le point $(2, 3)$. Allors, elles doivent passer $12z$ fois par $(2, 1)$, $11z$ fois par $(2, 2)$ et $10z$ fois par $(2, 3)$, puisqu'elles passent z fois par $(2, 2, 1)$. Mais dans ces conditions, la somme des multiplicités de ces courbes en O, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$ dépasse p, ce qui est impossible.

Les courbes $C_0^{(2z+1)}$ passent donc une fois par les points $(2, 3)$, $(2, 4), \ldots, (2, \beta-1)$. Supposons qu'elles passent y fois par le point $(2, 1)$ et, nécessairement, $2z+1$ fois par $(2, 2)$. En exprimant que la somme des multiplicités des courbes aux points O, $(2, 1), \ldots,$ $(2, \beta-1)$ est égale à p, on trouve $y = 2z-1$, alors que y doit être au moins égal à la sommes des multiplicités des courbes aux points $(2, 2)$, $(2, 2, 1)$.

Les courbes $C_0^{(2z+1)}$ passent donc $z-1$ fois par $(2, 2, 1)$. En reprenant un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait, on trouve que ces courbes passent $2z$ fois par $(2, 1)$. On en conclut qu'elles passent simplement par une suite de $10z$ points $(2, 1, 1)$, $(2, 1, 1)$, ..., $(2, 1, 10z)$ infiniment voisins successifs de $(2, 1)$. Ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, sauf le dernier, qui est uni de première espèce.

Cela étant, dans l'intersection de deux courbes $C_0^{(2z+1)}$, le point O absorbe $(5z+2)p$ points, par conséquent, le système $|\Gamma_0^{(2z+1)}|$, qui correspond à $|C_0^{(2z+1)}|$ sur Φ_1, a le degré $m-(5z+2)$. La surface Φ_1 est d'ordre $m-(n+2)$ et le degré de $|\Gamma_0^{(i+1)}|$ étant d'une unité au moins inférieure à celui de $|\Gamma_0^{(i)}|$, on voit que le passage de $|\Gamma_0'|$ à $|\Gamma_0^{(2z+1)}|$ abaisse le degré de $2z$ unités. Par conséquent, le degré de $|\Gamma_0^{(i+1)}|$ est exactement d'une unité inférieur à celui de $|\Gamma_0^{(i)}|$. En particulier, le degré de $|\Gamma_0''|$ est égal à $m-n-3$ et le point O_1' est simple pour la surface Φ_1 si $n = 3z$.

Envisageons maintenant l'hypothèse $n = 3z + 1$. Nous avons cette fois $t \leq 2z$ et par conséquent

$$\lambda_{2z+1} = 2z + 1 , \quad \mu_{2z+1} = 10z + 3 ;$$
$$\lambda_{2z+2} = 12z + 4 , \quad \mu_{2z+2} = 1 ;$$
$$\lambda_{2z+3} = 2z - 1 , \quad \mu_{2z+3} = 10z + 8 .$$

En raisonnant comme dans le premier cas, on trouve que les courbes $C_0^{(2z+2)}$ passent $12z + 1$ fois par O, $2z + 1$ fois par $(2, 1)$, z fois par $(2, 2)$, une fois par $(2, 3), \dots, (2, \beta - 1)$, $z - 1$ fois par $(2, 2, 1)$, deux fois par $5z + 1$ points $(2, 1, 1), \dots, (2, 1, 5z + 1)$ infiniment voisins successifs de $(2, 1)$, une fois par un point $(2, 1, 5z + 2)$ infiniment voisin successif de $(2, 1, 5z + 1)$ et une fois par un point $(2, 1, 5z + 2, 1)$ infiniment voisin de $(2, 1, 5z + 2)$. Enfin, elles passent simplement par les points $(1, 1), \dots, (1, \alpha - 1)$.

On en conclut que le degré du système $|\Gamma_0^{(2z+2)}|$ est égal à $m - 5z - 4$. On trouve encore que O_1' est simple pour la surface Φ_1 et que les degrés des systèmes $|\Gamma_0''|$, $|\Gamma_0'''|$, ... vont en diminuant d'une unité à la fois.

Le point O_1' et simple pour la surface Φ_1.

7. - Revenons maintenant aux courbes C_0''. Sur ces courbes, le point O est l'origine d'une branche superlinéaire passant par le point $(1, 1)$ et contenant un point simple, dans le domaine d'un certain ordre de O, uni de première espèce pour l'involution, dont le domaine correspond à celui de O_1' sur Φ_1.

Supposons que les courbes C_0'' passent 8 fois per les points $(1, 1), \dots, (1, x)$, y fois par le point $(1, x + 1)$ et une fois par les points $(1, x + 2), \dots, (1, \alpha - 1)$. Nous devons avoir

$$\lambda_2 + \mu_2 + x\mu_2 + y + \alpha - 2 - x = p ,$$

c'est-à-dire

$$7x + y = 2n - 3 .$$

Pour déterminer x et y, nous devons considérer les valeurs de n par rapport à 7, en remarquant que l'on ne peut avoir $n = 7z + 2$, car alors p ne serait pas premier.

Supposons $n = 7z$. L'equation précédente devient

$$7x + y = 12z - 3\,,$$

d'où $x = 2z - 1$, $y = 4$. Le comportement des branches d'origine O des courbes C_0'' passant par le point $(1, 1)$ est fixé par le schéma suivant:

$$\begin{array}{l} 0^{2n+5},\ (1,1)^8, \ldots,\ (1, 2z-1)^8,\ (1, 2z)^4,\ (1, 2z+1)^1, \ldots,\ (1, a-1)^1. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2z, 1)^3, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2z, 2)^1,\ (1, 2z, 2, 1)^1,\ (1, 2z, 2, 2)^1. \end{array}$$

Les autres cas se traitent de la même manière. Pour $n = 7z + 3$, par exemple, on trouve le schéma

$$\begin{array}{l} 0^{2n+5},\ (1,1)^8, \ldots,\ (1, 2z)^8,\ (1, 2z+1)^3,\ (1, 2z+2)^1, \ldots,\ (1, a-1)^1. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2z+1, 1)^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2z+1, 2)^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1, 2z+1, 3)^1,\ (1, 2z+1, 3, 1)^1. \end{array}$$

Dans tous les cas, on trouve que le degré de $|C_0''|$ est bien $(m - n - 3)\,p$.

Projetons la surface Φ_1 de O_0' sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une surface Φ_2, d'ordre $m - n - 3$, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0''. Sur cette surface sont tracées une droite σ_1, une droite exceptionnelle g_1 qui correspond au domaine de O_1' sur Φ_1 et qui rencontre σ_1 en un point (singulier) homologue de la droite τ_1 de Φ_1, une courbe τ_2 d'ordre $n - 2$ rencontrant g_1 en un point O_2' et une droite σ_2 s'appuyant sur τ_2.

8. - L'étude des courbes C_0''' se fait de la même manière. Sur ces courbes, le point O est l'origine d'une branche superlinéaire passant par un certain nombre de points $(1, 1)$, $(1, 2)$, ... et contenant un point simple, uni de première espèce, appartenant à un domaine d'un certain ordre de O. On voit sans peine qu'à ces courbes correspondent sur Φ_2 les sections Γ_0''' faites par les hyperplans passant par le point O_2', qui est simple pour la surface d'après ce qu'on a vu plus haut.

Sur la surface Φ_1, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans touchant en O_1' la courbe τ_2.

De même, les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans osculant la courbe τ_2 en O_1', et ainsi de suite. Les courbes Γ_0^* correspondant aux solutions $\lambda = 2n - 2t - 1$, $\mu = 5t + 3$ sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans ayant un contact d'ordre $t - 1$ avec la courbe τ_2 en O_1'.

Supposons pour fixer ies idées $n = 3z$ et considérons les courbes $C_0^{(2z)}$. En reprenant les valeurs de λ_{2z}, μ_{2z} et en opérant de la manière habituelle, on voit que les courbes $C_0^{(2z)}$ passent $12z - 1$ fois par O, trois fois par $(1, 1)$, une fois par $(1, 2), \ldots,$ $(1, \alpha - 1)$, deux fois par une suite de $5z - 3$ points $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2), \ldots, (1, 1, 5z - 3)$ infiniment voisins successifs de $(1, 1)$, une fois par deux points $(1, 1, 5z - 2)$, $(1, 1, 5z - 2, 1)$ infiniment voisins successifs de $(1, 1, 5z - 3$. Le dernier des points de la suite est uni de première espèce pour l'involution.

Considérons la projection Φ_{2z} de la surface Φ dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(2z)}$. Sur cette surface, nous avons une droite σ_1 soprésentant le domaine du point $(1, \alpha - 1)$, une droite exceptionnelle g représentant le domaine du point $(1, 1, 5z - 2, 1)$ rencontrant σ_1 en un point (singulier) représentant la droite τ_1, une courbe τ_2 d'ordre z représentant le domaine du point $(2, 2, 1)$ et enfin une droite σ_2 représentant le domaine du point $(2, \beta - 1)$. La courbe τ_2 rencontre les droites g et σ_2.

La surface Φ_{2z+1}, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(2z+1)}$, est la projection de la surface Φ_{2z} à partir d'un point O_{2z}' qui appartient à la courbe τ_2 et à la droite g, puisque les courbes $C_0^{(2z+1)}$ passent $z - 1$ fois par $(2, 2, 1)$ et ne passent plus par $(1, 1, 5z - 2, 1)$.

Sur la surface Φ_{2z+1} sont tracées une droite σ_1, une droite exceptionnelle g' représentant le domaine du point $(2, 1, 10z)$ et rencontrant σ_1 en un point qui représente τ_1 et g, une courbe τ_2 d'ordre $z - 1$ rencontrant g' en un point et enfin une droite σ_2 rencontrant τ_2 en un point.

Envisageons maintenant la surface Φ_{2z+2} dont les sections hyperplanes sonr les courbes $\Gamma_0^{(2z+2)}$. C'est la projection de Φ_{2z+1} à partir d'un point O_{2z+1}' de cette surface. Ce point ne peut appartenir à la courbe τ_2 puisque les courbes $C_0^{(2z+2)}$ passent le même nombre de fois par le point $(2, 2, 1)$ que les courbes $C_0^{(2z+1)}$. Il appartient aux droites g' et σ_1 puisque les courbes

$C_0^{(2z+2)}$ ne passent pas par les points $(2, 1, 10z)$ et $(1, \alpha-1)$. Le point O'_{2z+1} représente donc la courbe τ_1 et la droite exceptionnelle g.

Cela étant, il est facile de voir que les courbes $C_0^{(2z+2)}$ passent 8 fois par le point $(1, 1)$, deux fois par les points $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2), \dots, (1, 1, 5z-2)$, une fois par les points $(1, 1, 5z-2)$, $(1, 1, 5z-2, 1)$, six fois par les points $(1, 2), \dots, (1, n-1)$, trois fois par les points $(1, n)$, $(1, n, 1)$.

Sur la surface Φ_{2z+2} se trouvent une cubique gauche τ_1 contenant un point (singulier pour la surface) représentant la droite σ_1, une droite exceptionnelle g s'appuyant sur τ_1, une courbe τ_2 d'ordre $z-1$ rencontrant g, une droite σ_2 s'appuyant sur τ_2. La surface Φ_{2z+2} est d'ordre $m-(5z+6)$.

Sur la surface Φ_1, appelons O_2', O_3', ..., O'_{2z} les points infiniment voisins successifs de O_1' situés sur la courbe τ_2. Lorsque l'on passe de Φ_1 à Φ_2, Φ_3, ..., Φ_{2z}, les points O_2', O_3', ..., O'_{2z} apparaissent successivement comme points propres sur ces surfaces. Sur la surface Φ_{2z-1}, le point O'_{2z-1} est commun aux hyperplans découpant sur la surface les courbes $\Gamma_0^{(2z)}$; à ce point correspond sur Φ_{2z}, la droite exceptionnelle g, image du domaine du point $(1, 1, 5z-2, 1)$. Sur Φ_{2z}, le point O'_{2z} est commun aux hyperplans découpant les courbes $\Gamma_0^{(2z+1)}$; il lui correspond, sur la surface Φ_{2z+1}, la droite exceptionnelle g' représentant le domaine du point $(2, 1, 10z)$.

Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(2z)}$ sont découpées par les hyperplans passant par les points O_1', O_2', ..., O'_{2z-1}, c'est-à dire ayant un contact d'ordre $2z-2$ avec la courbe τ_2 au point O_1'. Les courbes $\Gamma_0^{(2z+1)}$ sont découpées par les hyperplans passant en outre par le point O'_{2z}, c'est-à-dire ayant un contact d'ordre $2z-1$ avec τ_2 en O_1'. Enfin les courbes $\Gamma_0^{(2z+2)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_1 et ayant un contact d'ordre $2z-2$ avec τ_2 en O_1'. Ces hyperplans contiennent le plan tangent à Φ en O_1' et rencontrent donc τ_2 en $2z$ points confondus en O_1'.

De tout ceci, on conclut que *sur la surface Φ_1, le point commun aux droites τ_1, σ_1 est simple pour la surface.*

9. - Pour $t = n-1$, la solution de la première catégorie est $\lambda = 1$, $\mu = 5n-2$. Les solutions de la seconde catégorie qui donnent des sommes $\lambda + \mu$ inférieures à $5n-1$ sont fournies par les valeurs de t satisfaisant à

$$3t < n - 2 .$$

Supposons $n = 3z$; on doit avoir $t \leq z - 1$. Avant d'arriver à la solution $\lambda = 1$, $\mu = 5n - 2$, on trouve $n - 1$ solutions de la première catégorie et z de la seconde, par conséquent nous avons

$$\lambda_{4z} = 1 , \quad \mu_{4z} = 15z - 2 .$$

Nous allons rechercher si le point commun à la droite σ_2 et à la courbe τ_2 sur la surface Φ_1 est simple ou double pour cette surface, mais auparavant, il nous faut faire certaines remarques et étudier le comportement en O de certains systèmes de courbes.

Commençons par considérer les courbes $C_0^{(2z+3)}$, qui correspondent à la solution $\lambda = 12z - 2$, $\mu = 6$. Elles passent six fois par les points $(1, 1), \ldots, (1, n-1)$ et trois fois par les points $(1, n)$, $(1, n, 1)$. En reprenant un raisonnement déjà fait plusieurs fois, on voit qu'elles passent $2z - 2$ fois par $(2, 1)$, $z - 1$ fois par $(2, 2)$, une fois par $(2, 3), \ldots, (2, \beta - 1)$, une fois par $(2, 1, 1)$, $\ldots, (2, 1, 10z)$ et $z - 2$ fois par le point $(2, 2, 1)$. On en conclut que sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(2z+3)}$ sont découpées par les hyperplans passant par les points O_1', O_2', O_{2z}' et par la droite τ_1. Sur la surface Φ_{2z+3}, on trouve la cubique gauche τ_1, la droite g', la courbe τ_2 d'ordre $z - 2$ et la droite σ_1.

Les courbes $C_0^{(2z+4)}$, correspondant à la solution $\lambda = 2z - 3$, $\mu = 10z + 8$, passent $12z + 5$ fois par O, $2z - 3$ fois par $(2, 1)$, $z - 1$ fois par $(2, 2)$, $z - 2$ fois par $(2, 2, 1)$ et une fois par les points $(2, 3), \ldots, (2, \beta - 1)$. Elles ne peuvent plus passer que deux fois par les points $(1, n)$, $(1, n, 1)$. Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(2z+4)}$ ne rencontrent donc plus la droite τ_1 qu'en deux points variables, par conséquent elles doivent avoir un point double en O_1', une des branches passant par $O_2', \ldots$, l'autre ayant une tangente variable. Mais alors, comme ces courbes doivent rencontrer τ_2 en $2z + 1$ points confondus en O_1', elles ne passent plus par le point O_{2z}', mais seulement par le point O_{2z-1}'. Il en résulte que les courbes $C_0^{(2z+4)}$ passent deux fois par les points $(1, 1, 1), \ldots, (1, 1, 5z - 3)$ et une fois par les points $(1, 1, 5z - 2)$, $(1, 1, 5z - 2, 1)$. Par conséquent, elles passent 13 fois par le point $(1, 1)$ et 11 fois par le point $(1, 2)$.

Supposons que ces courbes passent 11 fois par les points $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, x')$, y' fois par le point $(1, x'+1)$, 4 fois par les points $(1, x'+2), \dots, (1, n-1)$, 2 fois par les points $(1, n)$, $(1, n, 1)$. En exprimant que la sommes des multiplicités aux points 0, $(1, 1), \dots, (1, n)$ est égale à p, on trouve

$$7x' + y' = 2n .$$

Rapprochons cette équation de celle que l'on a obtenue en cherchant le comportement des courbes C_0'' aux mêmes points. On a $x' = x$ et, en observant que l'on doit avoir, en tenant compte des multiplicités de $(1, x+2)$ pour les courbes, $y - 1 = y' - 4$, les deux relations sont identiques. On en conclut que si l'on désigne par P le point uni de première espèce qui représente le domaine du point O_1' sur la surface Φ_1, le point P appartient aux courbes C_0'' et $C_0^{(2z+4)}$ comme point simple. Cela confirme que les courbes $\Gamma_0^{(2z+4)}$ passent doublement par O_1' et qu'une des tangentes est variable.

10. - Ces résultats peuvent se généraliser.

Obeservons que les systèmes $|C_0^{(2z)}|, \dots, |C_0^{(4z)}|$ se répartissent en deux catégories:

1) Les systèmes $|C_0^{(2z+2t)}|$ correspondant aux solutions

$$\lambda_{2z+2t} = 2z - 2t + 1 , \quad \mu_{2z+2t} = 10z + 5t - 2 ,$$

pour $t = 0, 1, \dots, z$.

2) Les systèmes $|C_0^{(2z+2t+1)}|$ correspondant aux solutions

$$\lambda_{2z+2t+1} = 12z - 2t , \qquad \mu_{2z+2t+1} = 5t + 1 ,$$

pour $t = 0, 1, \dots, z-1$.

Les courbes du système $|C_0^{(2z+2t)}|$ passent $2z - 2t + 1$ fois par le point $(2, 1)$, $z - t + 1$ fois par $(2, 2)$, $z - t$ fois par $(2, 2, 1)$, et une fois par $(2, 3), \dots, (2, \beta - 1)$.

Les courbes du système $|C_0^{(2z+2t+2)}|$ passent $2z - 2t - 1$ fois par $(2, 1)$, $z - 1$ fois par $(2, 2)$, $z - t - 1$ fois par $(2, 2, 1)$, une fois par $(2, 3), \dots, (2, \beta - 1)$.

Les courbes du système $|C_0^{(2z+2t+1)}|$, intermédiaire entre les précédents, passent une fois par le point $(2, \beta - 1)$ et soit $z - t$

fois, soit $z-t-1$ fois par le point $(2, 2, 1)$. En reprenant le raisonnement fait plus haut (n. 6), on voit que ces courbes passent précisément $z-t-1$ fois par ce dernier point. Par conséquent, les courbes $C_0^{(2z+2t+1)}$ passent $12z+3t+1$ fois par $0, 2z-2t$ fois par $(2, 1)$, $z-t$ fois par $(2, 2)$, $z-t-1$ fois par $(2, 2, 1)$, une fois par $(2, 3), \ldots, (2, \beta-1)$ et une fois par les points $(2, 1, 1), \ldots, (2, 1, 10z)$.

Il en résulte que sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(2z+2t+1)}$ sont découpées par les hyperplans passant par la droite τ_1 et par les points $O_1', O_2', \ldots, O_{2z}'$. Ces courbes doivent rencontrer la courbe τ_2 en $z-t-1$ points variables, donc elles doivent avoir pour points doubles les points $O_1', O_2', \ldots, O_t'$. En ce dernier point, elles ont une branche variable.

Les courbes $\Gamma_0^{(t+1)}$ sont découpées sur la surface Φ_1 par les hyperplans passant par les points $O_1', O_2', \ldots, O_t'$. Considérons les courbes $C_0^{(t+1)}$; elles correspondent à la solution

$$\lambda = 2n-2t-3\,, \qquad \mu = 5t+8\,,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\lambda = 2n-2t'+1\,, \qquad \mu = 5t'-2\,,$$

en posant $t' = t+2$.

Ces courbes passent $2n+3t'-1$ fois par le point O. Supposons qu'elles passent $5t'-2$ fois par les points $(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, x)$, y fois par le point $(1, x+1)$ et une fois par les points $(1, x+2), \ldots, (1, \alpha-1)$. En exprimant que la somme des multiplicités de ces points est égale à p, on a

$$(5t'-3)x + y = 2n-3t'+3\,. \qquad [1]$$

En partant de cette relation, on déterminera, comme on l'a fait plus haut, les points infiniment voisins successifs de $(1, x+1)$ appartenant aux courbes $C_0^{(t+1)}$ et situés sur une branche superlinéaire de ces courbes, d'origine O. Le dernier sera un point P, simple pour les courbes, uni de première espèce pour l'involution, dont le domaine correspondra à celui du point O_t' sur la surface Φ_1.

Les courbes $C_0^{(2z+2t+1)}$ devront passer par ce point P. Pour le prouver, observons tout d'abord que ces courbes ne peuvent plus passer que deux fois par les points $(1, n), (1, n, 1)$. Supposons qu'elles passent $5t+1$ fois par les points $(1,1), ..., (1, x')$, y' fois par le point $(1, x'+1)$, 4 fois par les points $(1, x'+2), ..., (1, n-1)$ et deux fois par le point $(1, n)$. On obtient en exprimant que la somme de ces multiplicités et de celle de O est égale à p, la relation

$$(5t-3)\,x' + y' = 2n - 3t + 6 \,. \qquad [2]$$

Si l'on pose $t' = t$, on voit que l'on a $x' = x$ et comme d'autre part on doit avoir $y - 1 = y' - 4$, les relations [1] e [2] coincident. Par conséquent, les courbes $C_0^{(2z+2t+1)}$ passent par P.

Revenons maintenant aux courbes $C_0^{(2z+2t)}$. Elles ne passent pas par $(2, 1, 20z)$ et par conséquent les courbes $\Gamma_0^{(2z+2t)}$ ne passent pas par O_{2z}'. Les courbes $\Gamma_0^{(2z+2t+1)}$ se déduisent des précédentes en les faisant passer par O_{2z}', d'où l'on déduit que les courbes $\Gamma_0^{(2z+2t)}$ passent deux fois par les points $O_1', O_2', ..., O_t'$ et une fois par les points $O_{t+1}', ..., O_{2z-1}'$. En conséquence, les courbes $C_0^{(2z+2t)}$ doivent passer deux fois par les points $(1,1,1,), ..., (1, 1, 5z-3)$, une fois par les points $(1, 1, 5z-2), (1, 1, 5z-2, 1)$. Nous allons voir qu'elles passent par le point P.

En tenant compte de la condition précédente, on voit que les courbes en question passent $5t+3$ fois par le point $(1, 1)$ et par suite $5t+1$ fois par le point $(1, 2)$. Supposons qu'elles passent $5t+1$ fois par les points $(1, 2), ..., (1, x'')$, y'' fois par les point $(1, x''+1)$, 4 fois par les points $(1, x''+2), ..., (1, n-1)$, enfin deux fois par le point $(1, n)$. On obtient cette fois la relation

$$(5t-3)\,x'' + y'' = 2n - 3t + 6$$

indentique à la relation [2]. On a donc $x'' = x$, $y'' = y'$ et les courbes $C_0^{(2z+2t)}$ passent bien par le point O_t'.

11. - Envisageons les courbes $C_0^{(4z-1)}$, qui correspondent aux solutions

$$\lambda_{4z-1} = 10z + 2 \,, \quad \mu_{4z-1} = 5z - 4 \,.$$

D'après ce que nous venons de voir, elles passent $15z-2$ fois par O, deux fois par $(2, 1)$, une fois par $(2, 2), ..., (2, \beta-1)$, une fois par les point $(2,1,1), ..., (2,1,10z), 3z-4$ fois par le point $(1,1), ...,$ une fois par un point P_1 commun à toutes les courbes $C_0^{(4z-1)}$, quatre fois par les points..., $(1, n-1)$, deux fois par les points $(1, n)$, $(1, n, 1)$. Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(4z-2)}$ sont découpées par des hyperplans passant par la droite τ_1; elles ont pour points doubles $O_1', O_2', ..., O_{z-1}'$ et pour points simples $O_z', ..., O_{2z}'$.

Envisageons maintenant les courbes $C_0^{(4z)}$, données par

$$\lambda_{4z} = 1\,, \quad \mu_{4z} = 15z - 2\,.$$

Elles passent une fois par les points $(2,1), ..., (2, \beta-1)$, $5z+3$ fois par le point $(1,1)$, $5z+1$ fois par les points $(1,2), ...,$ une fois par un point P_2 commun à toutes les courbes $C_0^{(z-1)}$, quatre fois par les points ..., $(1, n-1)$, deux fois par les points $(1, n)$, $(1, n, 1)$, deux fois par les points $(1,1,1), ..., (1,1,5z-3)$, enfin une fois par les points $(1,1,5z-2)$, $(1,1,5z-2,1)$. Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(4z)}$ sont découpées par des hyperplans passant par la droite τ_1; elles passent deux fois par les points $O_1', O_2', ..., O_z'$ et une fois par les points $O_{z+1}', ..., O_{2z-1}'$. Les courbes $\Gamma_0^{(4z-1)}$ et $\Gamma_0^{(4z)}$ ne rencontrent plus la courbe τ_2 en des points variables.

Considérons le système $|C_0^{(4z+1)}|$; il correspond aux solutions

$$\lambda_{4z+1} = 10z\,, \quad \mu_{4z+1} = 5z + 1\,.$$

Sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(4z+1)}$ sont découpées par des hyperplans contenant la droite τ_1 et la courbe τ_2. Les courbes $C_0^{(4z+1)}$ passeront donc par le point $(2,2,1)$, mais ne passeront plus par le point $(2, \beta-1)$. Elles passent précisément $15z+1$ fois par O, $10z$ fois par le point $(2,1)$, $5z$ fois par chacun des points $(2,2), (2,2,1)$. D'autre part, elles passent $5z+1$ fois par le point $(1,1), ...,$ une fois par le point $P_2, ...,$ quatre fois par le point $(1, n-1)$, et deux fois par les points $(1, n)$, $(1, n, 1)$.

Sur la surface Φ_{4z+1}, la courbe τ_2 a l'ordre $4z$ et contient un point, singulier pour la surface, représentant la droite σ_2. La surface contient une droite exceptionnelle représentant le point P_2 et une conique τ_1. La droite exceptionnelle s'appuie sur les courbes τ_1, τ_2.

Sur Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(4z+1)}$ passent par les points $O_1', O_2', ..., O_{z-1}'$.

De tout ceci, on conclut que *sur la surface Φ_1, le point commun à la droite σ_2 et à la courbe τ_2 est simple pour la surface.*

Les mêmes méthodes conduisent à des résultats analogues lorsque l'on suppose $n = 3z + 1$.

12. - Le point de diramation O' de Φ est donc équivalent à l'ensemble des quatre courbes rationnelles $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ et on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \sigma_1 + \tau_1 + \tau_2 + \sigma_2 \,.$$

On en conclut que les degrés virtuels des courbes $\sigma_1, \tau_1, \tau_2, \sigma_2$ sont respectivement égaux à $-2, -3, -(n+1), -2$.

En supposant encore, pour fixer les idées, $n = 3z$, on a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(2z+2)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + \tau_2 + \sigma_2 \,. \qquad [1]$$

Les courbes $\Gamma_0'', \Gamma_0''', \ldots, \Gamma_0^{(2z+1)}$ appartiennent comme courbes totales au système $|\Gamma_0'|$.

D'après la relation [1], les courbes $\Gamma_0^{(2z+1)}$ rencontrent la droite τ_1 en quatre points. Comme nous l'avons vu, un de ces points est fixe et coincide avec O_1'. Les courbes $\Gamma_0^{(2z+2)}$ ne sont donc pas les courbes les plus générales satisfaisant à la relation fonctionnelle [1].

Les courbes $\Gamma_0^{(2z+3)}, \Gamma_0^{(2z+4)}, \ldots, \Gamma_0^{(4z)}$ appartiennent comme courbes totales au système $|\Gamma_0^{(2z+2)}|$. Les courbes $\Gamma_0^{(4z+1)}$ satisfont à la relation

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4z+1)} + \sigma_1 + 2\tau_1 + 2\tau_2 + \sigma_2 \,.$$

Les courbes $\Gamma_0^{(4z+1)}$ rencontrent la courbe τ_2 en $2n+1$ points dont $z-1$ sont fixes et coincident avec $O_1', O_2', \ldots, O'_{z-1}$. Elles ont donc un contact d'ordre $z-2$ avec la courbe τ_2 en O_1'.

Il est facile de voir quels sont les comportements au point O des courbes $C_0^{(4z+2)}, \ldots$ Nous ne nous y arrêterons pas, notre dessein étant de fixer la singularité de la surface Φ au point de diramation O'.