Structure de quelques points de diramation de surfaces multiples cycliques

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de la Société

(*Première note*)

Dans nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, nous avons démontré qu'en un point de diramation d'une surface image de l'involution (surface multiple cyclique), le cône tangent à celle-ci est rationnel ou se scinde en quatre cônes rationnels au plus. En même temps, nous avons donné une méthode permettant de déterminer la structure d'un point de diramation, c'est-à-dire l'ensemble des courbes rationnelles auquel ce point est équivalent au point de vue des transformations birationnelles (1). Nous nous proposons d'appliquer cette méthode à la détermination de la structure de points de diramation dans deux cas particuliers. Ceux-ci nous paraissent avoir un certain intérêt à cause de la manière dont se présentent les diverses composantes du point. Ajoutons que ces points sont des points de diramation de seconde espèce.

Rappelons que sur une surface F, dans le voisinage d'un point uni de seconde espèce, A, auquel sont associés deux entiers α, β compris entre 0 et p, tels que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p, le nombre premier impair p étant l'ordre de l'involution, se trouve un ensemble de points unis infiniment voisins de A, formant une sorte d'arbre. Nous désignons par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, $\ldots$, $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, 1)$

(1) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1953); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique du C.B.R.M., Liège, 1952).

$(\beta, 2), \ldots, (\beta, \beta - 1)$ les deux branches principales de cet arbre, d'origine A. Les points $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, \beta - 1)$ sont unis de première espèce pour l'involution; les autres sont unis de seconde espèce. A un point uni (α, i) par exemple, où $i < \alpha - 1$, sont infiniment voisins deux points unis : l'un est $(\alpha, i+1)$, l'autre sera désigné par $(\alpha, i, 1)$. Si ce dernier point n'est pas uni de première espèce, deux points unis que nous désignons par $(\alpha, i, 2)$, $(\alpha, i, 1, 1)$ lui sont infiniment voisins. Et ainsi de suite.

Soit Φ une surface normale, image de l'involution, sur laquelle les points de diramation sont isolés. Nous désignons par C les courbes qui correspondent sur F aux sections hyperplanes de Φ. Le système $|C|$ est dépourvu de points-base. Nous considérons ensuite une suite de systèmes $|C'|$, $|C''|$, ... formés de courbes C passant par A et dont les multiplicités en ce point vont en croissant, les courbes du dernier système de la suite ayant en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Si l'on rapporte projectivement les courbes C', C'', ... aux hyperplans d'espaces linéaires de dimensions convenables, on obtient des surfaces Φ_1, Φ_2, ... dont chacune est la projection de la précédente, Φ_1 étant la projection de Φ à partir du point de diramation A' homologue du point uni A. Les composantes du point A', ainsi que des droites exceptionnelles, apparaissent successivement sur les surfaces Φ_1, Φ_2, ...

Dans le cas que nous considérons ici, $p = 31$, $\alpha = 22$, $\beta = 24$, le point de diramation A' est équivalent à six courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha,\ \rho,\ \tau_\alpha,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \sigma_\beta,$$

toutes de degré virtuel -2 sauf τ_α, qui est de degré virtuel -4. Chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres. Le point A' est multiple d'ordre quatre pour les surfaces Φ, le cône tangent en ce point étant formé de deux plans et d'un cône du second degré. La courbe ρ apparaît sur la surface Φ_4, où elle se présente comme une droite.

Sur la surface Φ_1, nous avons une droite σ_α, une conique τ_α et une droite σ_β. Le point commun à σ_α et τ_α est équivalent à ρ et nous montrons que ce point est double conique pour Φ_1, ce qui prouve que la droite ρ apparaissant sur la surface Φ_4 n'est pas une droite exceptionnelle, comme on pourrait le croire à première vue. Le point commun à τ_α, σ_β est double biplanaire pour Φ_1 et ses composantes apparaissent sur la surface Φ_2.

Dans une seconde note, nous étudierons le cas $p = 41$, $\alpha = 35$, $\beta = 34$; le point de diramation équivaut alors à dix courbes rationnelles.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre $p = 31$, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par Φ une surface normale image de l'involution I sur laquelle les points de diramation sont isolés. Aux sections hyperplanes Γ de Φ correspondent sur F des courbes C formant un système linéaire $|C|$ appartenant à l'involution I, privé de points-base.

Considérons un point uni A de seconde espèce sur F et soit A' le point de diramation correspondant sur Φ. Rappelons que pour déterminer la structure du point A et celle du point A', nous formons sur F une suite de systèmes linéaires $|C'|$, $|C''|$, ... formés de courbes C passant par A et dont les multiplicités en ce point vont en croissant. Si α est l'entier compris entre 1 et p attaché au point A, la multiplicité des courbes $C^{(i)}$ en A est égale à $\lambda_i + \mu_i$, λ_i tangentes étant réunies avec une des directions unies issue de A et μ_i avec l'autre direction unie, λ_i et μ_i satisfaisant à la congruence

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0\,, \qquad (\text{mod. } p)$$

Nous désignons par $\Gamma^{(i)}$ les courbes qui correspondent sur la surface Φ aux courbes $C^{(i)}$ et par Φ_i la surface, projection de Φ, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma^{(i)}$.

Actuellement, nous avons $p = 31$ et nous prendrons $\alpha = 22$. Le nombre β compris entre 1 et p, tel que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p, est actuellement $\beta = 24$.

Nous avons à rechercher les solutions des congruences équivalentes

$$\lambda + 22\mu \equiv 0\,, \qquad \mu + 24\lambda \equiv 0\,, \qquad (\text{mod. } 31).$$

On trouve

$\lambda_1 =\ \ , \mu_1 = 7$; $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 4$; $\lambda_3 = 9$, $\mu_3 = 1$; $\lambda_4 = 2$, $\mu_4 = 14$; $\lambda_5 = 6$, $\mu_5 = 11$; $\lambda_6 = 10$, $\mu_6 = 8$; $\lambda_7 = 14$, $\mu_7 = 5$; $\lambda_8 = 18$, $\mu_8 = 2$; $\lambda_9 = 3$, $\mu_9 = 21$; $\lambda_{10} = 7$, $\mu_{10} = 18$; ...

Nous désignerons par n l'ordre de la surface Φ.

2. Les courbes C′, qui correspondent à la solution $\lambda_1 = 1$ $\mu_1 = 7$, ont la multiplicité huit en A; elles passent une fois par la suite de points infiniment voisins successifs de A : (β, 1), (β, 2) ... (β, 23). Elles passent d'autre part par les points de la suite (α, 1), (α, 2), ..., (α, 21), infiniment voisins successifs de A. Supposons qu'elles passent sept fois par les x premiers points de cette suite, y fois par le suivant et une fois par les points restants. On doit avoir

$$8 + 7x + y + 20 - x = 31$$

d'où $x = 0$, $y = 3$.

On en conclut que les courbes C′ passent trois fois par (α, 1), une fois par (α, 2), (α, 3), ..., (α, 21), deux fois par deux points (α, 1, 1), (α, 1, 2) infiniment voisins successifs de (α, 1).

Les points (α, 21), (α, 1, 2) et (β, 23) sont unis de première espèce par l'involution. Il leur correspond, sur la surface Φ_1, au premier une droite σ_α, au second une conique τ_α et au troisième une droite σ_β. La droite σ_α rencontre la conique τ_α en un point A'_{11} et la droite σ_β rencontre τ_α en un point A'_1. Nous allons voir que le premier de ces points est double conique et le second double biplanaire pour la surface Φ_1.

Deux courbes C′ ont 4×31 points d'intersection absorbés en A et A′ est quadruple pour la surface Φ. La surface Φ_1 est d'ordre $n - 4$.

3. Les courbes C″ correspondent à la solution $\lambda_2 = 5$, $\mu_2 = 4$. Elles passent neuf fois par A, deux fois par (α,1), une fois par (α, 2), ..., (α, 21) et par (α, 1, 1), (α, 1. 2). Elles ne peuvent plus passer par (β, 23). Supposons qu'elles passent cinq fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., (β, x) et y fois par $(\beta, x+1)$. On doit avoir

$$9 + 5x + y = 31 ,$$

d'où $x = 4$, $y = 2$. Les courbes passeraient alors deux fois par le point $(\beta, 5, 1)$ et une fois par les points $(\beta, 5, 2)$, $(\beta, 5, 2, 1)$, infiniment voisins successifs de $(\beta, 5)$. Mais alors, deux courbes C'' auraient un commun 7×31 points d'intersection absorbés en A, la surface Φ_2 serait d'ordre $n - 7$ et le point A'_1 serait triple pour la surface Φ_1 alors qu'il est au plus double pour cette surface. Nous arrivons donc à une absurdité.

Considérons les courbes $C^{(4)}$. On a $\lambda_4 = 2$ et on trouve que ces courbes, qui ont la multiplicité 16 en A, passent deux fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 7)$ et une fois par les points $(\beta, 8)$, $(\beta, 8, 1)$.

On trouve alors que les courbes C'' passent cinq fois par les points $(\beta, 1)$ $(\beta, 2)$, trois fois par $(\beta, 3)$, deux fois par $(\beta, 4)$ ..., $(\beta, 7)$, une fois par $(\beta, 8)$, $(\beta, 8, 1)$, enfin une fois par les points $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2,)$ infiniment voisins successifs de $(\beta, 3)$.

Sur la surface Φ_2, il correspond au domaine du point $(\alpha, 21)$, une droite σ_α, au domaine de $(\alpha, 1, 2)$, une droite τ_α, au domaine de $(\beta, 3, 2)$, une droite ρ_1 qui rencontre τ_α en un point, au domaine de $(\beta, 8, 1)$, une droite ρ_2 qui rencontre ρ_1 en un point.

On vérifie que Φ_2 est d'ordre $n - 6$. Le point A'_1 est double biplanaire pour Φ_1 et équivaut à l'ensemble des droites ρ_1, ρ_2. Φ_2 est la projection de Φ_1 à partir de A'_1.

4. Passons à l'examen des courbes C''', qui correspondent à $\lambda_3 = 9$, $\mu_3 = 1$.

Les courbes C''' passent dix fois par A et une fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 21)$. Elles doivent encore passer par $(\beta, 8, 1)$, car la droite ρ_α existe encore sur Φ_4. Elles ne peuvent plus passer par $(\beta, 3, 2)$. On trouve alors qu'elles passent huit fois par $(\beta, 1)$, deux fois par $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 7)$, une fois par $(\beta, 8)$, $(\beta, 8, 1)$ et une fois par une suite de points $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 2)$, ..., $(\beta, 1, 1, 8)$ infiniment voisins successifs de $(\beta, 1)$.

Deux courbes C''' ont 7×31 points d'intersection absorbés en A et la surface Φ_3 est d'ordre $n - 7$.

Sur la surface Φ_3 il correspond à $(\alpha, 21)$ une droite σ_α, au domaine du point $(\beta, 1, 1, 8)$ une droite ρ' et au domaine de $(\beta, 8, 1)$, une droite ρ_2. La surface Φ_3 est la projection de Φ_2 à partir du point A'_2 commun aux droites τ_α, ρ_1. Ce point est simple pour la surface et la droite ρ' est exceptionnelle.

Les droites σ_α, ρ' se rencontrent en un point A'_3 qui représente τ_α et qui est donc singulier pour Φ_3.

5. Les courbes $C^{(4)}$ correspondent à $\lambda_4 = 2$, $\mu_4 = 14$. Nous avons vu qu'elles passent deux fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 7)$ et une fois par $(\beta, 8)$, $(\beta, 8, 1)$.

Les courbes $C^{(4)}$ ne peuvent plus passer par $(\alpha, 21)$, donc sur Φ_3, les courbes $\Gamma^{(4)}$ sont découpées par les hyperplans passant par A'_3. Comme ce point représente τ_α, les courbes $C^{(4)}$ passeront par $(\alpha, 1, 2)$.

Supposons que les courbes $C^{(4)}$ passent i fois par $(\alpha, 1, 2)$. Alors, elles passent également i fois par $(\alpha, 1, 1)$ et $14 - 2i$ fois par $(\alpha, 1)$. Elles peuvent donc passer $14 - 3i$ fois par $(\alpha, 2)$. Supposons qu'elles passent $14 - 3i$ fois par $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, x + 1)$ et y fois par $(\alpha, x + 2)$. On doit avoir, A étant multiple d'ordre 16,

$$16 + 14 - 2i + (14 - 3i)x + y = 31 ,$$

c'est-à-dire

$$(14 - 3i)x + y = 2i + 1 .$$

La courbe τ_α n'étant pas exceptionnelle, on doit avoir $i > 1$. On peut donc avoir $i = 2$, 3 ou 4.

Si $i = 2$, on a $x = 0$, $y = 5$. Les courbes $C^{(4)}$ passent dix fois par $(\alpha, 1)$, cinq fois par $(\alpha, 2)$, trois fois par $(\alpha, 2, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2, 1, 1,)$, une fois par $(\alpha, 2, 1, 1, 1)$, $(\alpha, 2, 1, 1, 1, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$. Deux courbes $C^{(4)}$ se rencontrent en 14×31 points confondus en A et la surface Φ_4 est d'ordre $n - 17$. Or, Φ_4 est la projection de Φ_3 à partir de O'_3 et ce point est triple pour Φ_3. On arrive donc à une contradiction et on ne peut avoir $i = 2$.

Si $i = 3$, on a $x = 1$, $y = 2$. Les courbes $C^{(4)}$ passent huit fois par $(\alpha, 1)$, cinq fois par $(\alpha, 2)$, deux fois par $(\alpha, 3)$ et par $(\alpha, 3, 1)$, une fois par $(\alpha, 3, 2)$ et par $(\alpha, 3, 2, 1)$, trois fois par $(\alpha, 1, 1)$, et $(\alpha, 2, 1)$. On trouve que la surface Φ_4 doit être d'ordre $n - 13$ alors que A'_3 est multiple d'ordre quatre pour la surface Φ_3, d'ordre $n - 7$, d'où contradiction.

On doit donc avoir $i = 4$. Les courbes $C^{(4)}$ passent six fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, $(\alpha, 4)$, $(\alpha, 5)$, une fois par $(\alpha, 6)$, $(\alpha, 6, 1)$ et quatre fois par $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$. Le point A'_3 est quintuple pour Φ_3 et la surface Φ_4 est d'ordre $n - 12$.

Sur la surface Φ_4, on a une droite ρ qui correspond au domaine du point $(\alpha, 6, 1)$, une quartique rationnelle gauche τ_α, qui correspond au domaine du point $(\alpha, 1, 2)$ et qui rencontre ρ en un point, une droite ρ_2 qui représente le domaine du point $(\beta, 8, 1)$ et qui rencontre τ_α en un point A'_4. Le domaine de ce point représente ρ_1.

6. Les courbes $C^{(5)}$ correspondent à la solution $\lambda_5 = 6$, $\mu_5 = 11$. Ces courbes passent 17 fois par A, cinq fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2)$, ... $(\alpha, 5)$, une fois par $(\alpha, 6)$ et $(\alpha, 6, 1)$, trois fois par $(\alpha, 1, 1)$ et $(\alpha, 1, 2)$. Elles ne peuvent plus passer par $(\beta, 8, 1)$ et on trouve qu'elles passent six fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, deux fois par $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2)$.

Le point A'_4 est double pour Φ_4. La surface Φ_α est d'ordre $n - 14$ et contient une droite ρ représentant le domaine du point $(\alpha, 6, 1)$, une cubique gauche τ_α représentant le domaine du point $(\alpha, 1, 2)$, une conique ρ_1 représentant le domaine du point $(\beta, 3, 2)$ et rencontrant τ_α en un point A'_5.

7. Les courbes $C^{(6)}$ correspondent à la solution $\lambda_6 = 10$, $\mu_6 = 8$. Les courbes passent 18 fois par A, quatre fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 5)$, une fois par $(\alpha, 6)$ et $(\alpha, 6, 1)$, deux fois par $(\alpha, 1, 1)$ et $(\alpha, 1, 2)$. Elles passent d'autre part 9 fois par $(\beta, 1)$, trois fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 2)$, ..., $(\beta, 1, 1, 5)$.

La surface Φ_6 est d'ordre $n - 15$ et le point A'_5 est simple pour la surface Φ_5. Sur Φ_6 sont tracées une droite ρ correspondant à $(\alpha, 6, 1)$, une conique τ_α correspondant à $(\alpha, 1, 2)$, une droite exceptionnelle ρ' correspondant à $(\beta, 1, 1, 5)$, rencontrant τ_α en un point, enfin une droite ρ_1, correspondant à $(\beta, 3, 2)$, rencontrant ρ' en un point.

8. Les courbes $C^{(7)}$ correspondent à $\lambda_7 = 14$, $\mu_7 = 5$. Les courbes $C^{(7)}$ passent 19 fois par A, trois fois par $(\alpha, 1)$, deux fois par $(\alpha, 2), \ldots, (\alpha, 5)$, une fois par $(\alpha, 6)$, $(\alpha, 6, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$. Elles passent en outre huit fois par $(\beta, 1)$, trois fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2)$, cinq fois par $(\beta, 1, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 2)$, $(\beta, 1, 2, 1)$, $(\beta, 1, 2, 2)$, $(\beta, 1, 2, 3)$ et $(\beta, 1, 2, 4)$.

La surface Φ_7 est d'ordre $n - 16$. Elle est la projection de la surface Φ_6 à partir du point A'_6 commun à τ_α et ρ', point qui est simple pour la surface.

La surface Φ_7 contient une droite ρ correspondant au point $(\alpha, 6, 1)$, une droite τ_α correspondant à $(\alpha, 1, 2)$, une droite exceptionnelle ρ'', correspondant au point $(\beta, 1, 2, 4)$, rencontrant τ_α en un point A'_7, enfin une droite ρ_1 correspondant au point $(\beta, 3, 2)$, rencontrant ρ'' en un point.

9. Les courbes $C^{(8)}$ correspondent à la solution $\lambda_8 = 18$, $\mu_8 = 2$. Elles passent 20 fois par A, deux fois par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, 5)$, une fois par $(\alpha, 6)$, $(\alpha, 6, 1)$, sept fois par $(\beta, 1)$, trois fois par $(\beta, 2)$, une fois par $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2)$, quatre fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, trois fois par $(\beta, 1, 3)$, une fois par $(\beta, 1, 3, 1)$, $(\beta, 1, 3, 1, 1)$ et $(\beta, 1, 3, 1, 2.)$.

La surface Φ_8 est d'ordre $n - 17$; elle est la projection de Φ_7 à partir de A'_7 et ce point est simple pour cette surface.

La surface Φ_8 contient une droite ρ, correspondant à $(\alpha, 6, 1)$, une droite exceptionnelle ρ''' correspondant au point $(\beta, 1, 3, 1, 2)$ et, une droite ρ_1, correspondant à $(\beta, 3, 2)$.

La droite ρ''' coupe ρ en un point A'_8 qui représente τ_α et la droite ρ_1 en un point.

10. Les courbes $C^{(9)}$ correspondent à la solution $\lambda_9 = 3$, $\mu_9 = 21$. Elles passent 24 fois par A, sept fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, trois fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$ une fois par les points $(\beta, 3)$, $(\beta, 3, 1)$, $(\beta, 3, 2)$.

La surface Φ_9 est d'ordre $n - 24$. Elle est la projection de Φ_8 à partir du point A'_8, heptuple pour cette surface.

Sur la surface Φ_9 sont tracées une heptique rationnelle τ_α qui représente le domaine du point $(\alpha, 1, 2)$ et une droite ρ_1, correspondant au point $(\beta, 3, 2)$, rencontrant τ_α en un point A'_9.

11. Les courbes $C^{(10)}$ sont données par la solution $\lambda_{10} = 7$, $\mu_{10} = 18$. Elles passent six fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\alpha, 1, 2)$, six fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 1, 5)$.

La surface Φ_{10} est d'ordre $n - 25$ et est la projection de Φ_9 à partir du point A'_9, simple pour cette surface.

Sur la surface Φ_{10} sont tracées une sextique rationnelle τ_α et une droite exceptionnelle ρ', correspondant respectivement aux points $(\alpha, 1, 2)$ et $(\beta, 1, 1, 5)$. La droite ρ' rencontre τ_α en un point.

12. Il est inutile de considérer les surfaces Φ_{11}, Φ_{12}, ... Le point de diramation A' est équivalent à l'ensemble de six courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha,\ \rho,\ \tau_\alpha,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \sigma_\beta,$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontre pas les autres.

Les six courbes sont de degré virtuel -2. sauf τ_α, qui est de degré virtuel -4.

On a

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_\alpha + \rho + \tau_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_\beta\ ,$$

$$\Gamma \equiv \Gamma'' + \sigma_\alpha + \rho + \tau_\alpha + 2(\rho_1 + \rho_2) + \sigma_\beta\ .$$

Les courbes Γ''' sont des courbes Γ'' passant par un point simple.

On a ensuite

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(4)} + \sigma_\alpha + 2(\rho + \tau_\alpha + \rho_1 + \rho_2) + \sigma_\beta\ .$$

Les courbes $\Gamma^{(5)}$, $\Gamma^{(6)}$, $\Gamma^{(7)}$ sont des courbes $\Gamma^{(4)}$ particulières.

Nous avons

$$\Gamma \equiv \Gamma^{(8)} + \sigma_\alpha + 2(\rho + \tau_\alpha) + 3\rho_1 + 2\rho_2 + \sigma_\beta$$

et ensuite

$$\Gamma \equiv \Gamma_0^{(9)} + \sigma_\alpha + 2\rho + 3\tau_\alpha + 3\rho_1 + 2\rho_2 + \sigma_\beta .$$

Les courbes Γ' découpées sur Φ_1 par les hyperplans passant par le point A'_{11} doivent avoir un point double en ce point. Elles rencontrent la conique τ_α en un point, la droite σ_β, mais ne rencontrent pas les droites σ_α, ρ_1, ρ_2. Si l'on désigne ces courbes par $\overline{\Gamma'}$, on trouve aisément qu'elles vérifient la relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv \overline{\Gamma'} + \sigma_\alpha + 2\rho + \tau_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \sigma_\beta .$$

Elles rencontrent ρ en deux points.

Liège, le 30 novembre 1955.