Addition à la note sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique

par Lucien GODEAUX
Membre de la Société

Dans la note en question (1), nous avons déterminé l'ordre d'une involution cyclique possédant un point uni tel que le cône tangent au point de diramation correspondant sur la surface multiple image de l'involution, se scinde en quatre cônes rationnels (point uni et point de diramation de seconde espèce et de troisième catégorie); c'est le cas général. Mais on sait que le cône tangent en un point de diramation de seconde espèce peut aussi se scinder en deux ou trois cônes rationnels (première et seconde catégories). On peut évidemment déduire dans ces cas l'ordre de l'involution en appliquant la formule générale, ou bien retrouver les formules des cas particuliers par le raisonnement qui a été appliqué dans le cas général. Nous indiquons ici comment on utilise le premier procédé.

1. — Soit Φ une surface multiple cyclique d'ordre premier impair p possédant un point de diramation A' de seconde espèce. Projetons Φ de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant; nous obtenons une surface Φ_1 sur laquelle, au domaine du premier ordre du point A', correspond un ensemble de courbes rationnelles. En conservant les notations de notre note citée plus haut, nous avons, sur la surface Φ_1 :

une courbe rationnelle σ_α d'ordre a, de degré virtuel — $(a+1)$,
une courbe rationnelle τ_α d'ordre m, de degré virtuel — $(m+2)$,
une courbe rationnelle τ_β d'ordre n, de degré virtuel — $(n+2)$,
une courbe rationnelle σ_β d'ordre b', de degré virtuel — $(b'+1)$.

---

(1) *Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège*, 1953, pp. 77-84.

Les courbes σ_α et τ_α se rencontrent en un point A'_α, qui peut être simple ou double pour la surface Φ_1. Nous supposerons qu'il est équivalent à u droites de degré virtuel — 2, le cas où il est simple correspondant à $u = 0$.

Les courbes τ_α et τ_β se coupent en un point A'_1 qui peut être simple ou double pour Φ_1. Nous le supposerons équivalent à t droites de degré virtuel — 2.

Enfin, les courbes τ_β et σ_β se coupent en un point A'_β que nous supposerons équivalent à v droites de degré virtuel — 2.

Dans ces conditions, nous avons

$$p=[(t+1)UV+(v+1)U+(u+1)V]ab'+[(tn+n+1)U+n(u+1)]a$$
$$+[(tm+m+1)V+m(v+1)]b' + (t+1)mn+m+n\ ,$$

où nous posons

$$U = m(u+1) + 1, \qquad V = n(v+1) + 1\ .$$

Les courbes τ_α et τ_β peuvent manquer, le cône tangent à Φ en A' se scindant alors en trois cônes si τ_β manque, en deux cônes si τ_α et τ_β manquent.

2. — Supposons que τ_β manque. On a alors $n = 0$ et on peut supposer que le point A'_1 est équivalent et $t+v+1$ droites de degré virtuel — 2 (ce qui est le degré virtuel de τ_β lorsque $n = 0$).

On a alors $V = 1$ et

$$p = [(t + 1)U + (v + 1)U + u + 1]ab' + aU +$$
$$+ [(t + 1)m + 1 + m(v + 1)]b' + m\ .$$

En remplaçant $t + v + 1$ par t, on a

$$p = [(t + 1)U + u + 1]ab' + aU + [(t + 1)m + 1]b' + m. \qquad (1)$$

Telle est la valeur de p lorsque A' est un point de diramation de seconde espèce équivalent aux courbes σ_α, τ_α, σ_β, lorsque A'_α est équivalent à u droites de degré virtuel — 2 et A'_1 à t droites de degré virtuel — 2.

3. — Supposons maintenant que τ_α et τ_β manquent. On a, dans la formule (1), $m = 0$, $U = 1$. On peut considérer le point A'_1 comme équivalent à $t + u + 1$ droites. On a alors

$$p = (t + 1 + u + 1)ab' + a + b',$$

ou, en remplaçant $t + u + 1$ par t et en remarquant que $b' = b$,

$$p = (t + 1)ab + a + b\,.$$

C'est la valeur de p lorsque A' est un point de diramation de première catégorie, équivalent à deux courbes σ_α, σ_β, le point A'_1 étant équivalent à t droites de degré virtuel -2.

Liège, le 1er juillet 1955.