Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 26e année, no 1, 1957, pp. 3-15

LA THEORIE DES INVOLUTIONS CYCLIQUES APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE ET SES APPLICATIONS

par Lucien GODEAUX (*)

Les premières recherches sur les involutions appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis sont dues à Enriques et à M. Severi. Dans leur important *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Prix Bordin 1907) (1), ils ont déterminé les involutions de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) appartenant à une surface F de Jacobi ou de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$). Ces involutions ont un nombre fini de points unis et sont engendrées par un groupe de transformations birationnelles de la surface F en elle-même. Rappelons aussi d'importantes recherches sur le même argument de Bagnera et De Franchis (2). Nous avons ensuite étudié les involutions appartenant à une surface de genres un n'ayant qu'un nombre fini de points unis et par suite de genres un ou de bigenre un, ainsi que les involutions de bigenre un appartenant à une surface de bigenre un (3).

Nous avons ainsi été conduit à l'étude des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique quelconque. Soit F la surface contenant l'involution et Φ une surface image de cette involution sur laquelle les points de diramation (ou de ramification) sont isolés. Si la surface Φ est de genres un ou de bigenre un, les points de diramation sont doubles. Au contraire si la surface Φ est quelconque, les points de diramation peuvent avoir une multiplicité quelconque (au plus égale à l'ordre de l'involution). Nous avons démontré qu'en un point de diramation, le cône tangent à la surface Φ est composé de quatre cônes rationnels au plus. Et la méthode suivie donne

(*) Communication faite au Colloque « Henri Poincaré », Paris, (18-27 octobre 1954).

aussi la structure du point de diramation, c'est-à-dire l'ensemble des courbes rationnelles équivalent, dans le sens de la Géométrie algébrique, à ce point. Ce sont ces recherches que nous voudrions résumer ici. Nous y ajouterons quelques applications que nous en avons faites pour déterminer l'existence de surfaces possédant des propriétés assignées (4)

1 — Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I, d'ordre premier p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous avons montré que l'on peut prendre pour modèle projectif de F une surface normale, appartenant à un espace linéaire S_r, de dimension r aussi grande qu'on le veut, sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie cyclique T, de période p, possédant p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$, tels que le premier seul, ξ_0, rencontre F. Ces points de rencontre sont les points unis de l'involution I.

Désignons par C les sections hyperplanes de F et par C_i les courbes découpées sur F par les hyperplans passant par les espaces $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{p-1}$. Nous avons ainsi p systèmes linéaires $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$, appartenant à l'involution I. Le premier est dépourvu de points-base, les autres ont pour points-base les points unis de l'involution.

On peut toujours supposer, quitte à remplacer $|C|$ par un de ses multiples convenablement choisi, que la dimensions r_0 du système $|C_0|$ est aussi grande qu'on le veut. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_{r_0} à r_0 dimensions, il correspond à F une surface normale Φ image de l'involution en ce sens qu'il y a une correspondance biunivoque entre les groupes de l'involution I sur F et les points de Φ, c'est-à-dire une correspondance $(1, p)$ entre Φ et F.

Observons que si l'on écrit les équations de l'homographie T, cela revient à attacher à chacun des axes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ une racine primitive d'ordre p de l'unité. Précisément, si l'on désigne par ε une de ces racines, nous attachons aux espaces $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_{p-1}$ les nombres $\varepsilon^0 = 1,\ \varepsilon, \ldots, \varepsilon^i, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.

2 — Soit A un point uni de l'involution, appartenant donc à ξ_0, que nous supposons simple pour la surface F. Le plan tangent η à F en A est transformé en soi par T. Nous supposerons que ce plan ne coupe l'espace ξ_0 qu'au seul point A.

Deux cas peuvent se présenter :

1) Le plan η coupe un des espaces $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$ suivant une droite et T détermine une homologie dans η. Nous dirons que le point A est uni de première espèce.

2) Le plan η coupe deux des espaces $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$ chacun en un point et T détermine dans η une homographie non homologique. Nous dirons que A est un point uni de seconde espèce.

Désignons par A′ le point de Φ qui correspond à A et qui est donc un point de diramation (ou de ramification).

Le point A′ est singulier pour Φ et il s'agit de déterminer cette singularité ou, d'une manière plus précise, l'ensemble des courbes infiniment petites équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, au point A′. C'est ce que nous appelons la *structure* du point A′.

Lorsque A est uni de première espèce, on démontre assez facilement que le point A′ est multiple d'ordre p pour Φ, le cône tangent en ce point à cette surface étant rationnel et irréductible. Ce cas se présente toujours pour $p = 2$.

Nous nous occuperons ici des points unis de seconde espèce et nous supposerons donc $p > 2$.

Si A est un point uni de seconde espèce, on peut toujours supposer, en changeant éventuellement de notation, que le plan tangent η en A à F s'appuie en un point A_1 sur ξ_1 et en un point A_α sur ξ_α. Si nous rapportons le plan η au triangle AA_1A_α, l'homographie déterminée par T dans ce plan a pour équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_\alpha = x_0 : \varepsilon\, x_1 : \varepsilon^\alpha\, x_\alpha.$$

Si nous posons $\zeta = \varepsilon^\alpha$, il existe un entier β compris entre 1 et p tel que

$$\zeta^\beta = \varepsilon$$

et l'homographie dans η peut aussi être représentée par

$$x'_0 : x'_1 : x'_\alpha = x_0 : \zeta^\beta\, x_1 : \zeta\, x_\alpha.$$

Au point uni de seconde espèce A sont donc attachés deux nombres α, β compris entre 1 et p. On a d'ailleurs

$$\alpha\,\beta - 1 \equiv 0, \quad (\text{mod. } p).$$

3 — Désignons par C'_0 les courbes C_0 passant par A. Ces courbes acquièrent en A une certaine multiplicité inférieure à p, les tangentes étant confondues avec les droites unies $t_\alpha = AA_1$, $t_\beta = AA_\alpha$. Nous supposerons précisément que les courbes C'_0 ont en A la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, avec λ_1 tangentes confondues avec t_α et μ_1 avec t_β.

On a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 \equiv 0, \mu_1 + \beta\lambda_1 \equiv 0, \ (\text{mod.}\, p).$$

Appelons C''_0 les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite de η distincte de t_α; t_β. Ces courbes ont en A une multiplicité $\lambda_2 + \mu_2 > \lambda_1 + \mu_1$ et λ_2 tangentes confondues avec t_α, μ_2 avec t_β.

Définissons de même les courbes C'''_0, $C^{(4)}_0$,... Nous obtenons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C'_0|, \ |C''_0|, \ |C'''_0|, \ldots$$

dont les multiplicités en A vont en croissant. Nous arriverons finalement à un système dont les courbes ont en A la multiplicité p avec p tangentes variables. Si nous posons $p = 2\nu + 1$, ce dernier système est $|C_0^{(\nu+1)}|$.

Nous désignerons par $\lambda_i + \mu_i$ la multiplicité en A des courbes $C_0^{(i)}$ et nous supposerons que ces courbes ont λ_i tangentes confondues avec t_α et μ_i avec t_β. Les nombres λ_i, μ_i sont solutions des congruences

$$\lambda + \alpha\,\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\,\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } p). \tag{1}$$

Supposons que nous ayons

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = h_\alpha p, \ \ \mu_1 + \beta\lambda_1 = h_\beta\, p,$$

où $h_\alpha \geqslant 1$, $h_\beta \geqslant 1$. Nous supposerons ici que ces nombres sont supérieurs à l'unité, les cas où l'un au moins d'entre eux est égal à l'unité se déduisant facilement.

4 — Considérons les courbes C_1 découpées sur F par les hyperplans passant par $\xi_0, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$. Ces courbes passent simplement par A en y touchant la droite t_β.

Les points de rencontre d'une courbe C_1 avec une des courbes C'_0, C''_0,... confondus en A sont en nombre kp multiple de p. En particulier, le nombre des points de rencontre des courbes C_1, $C_0^{(\nu+1)}$ est égal à p, donc on a $k = 1$.

Il résulte de ceci que les courbes C_1 ont en commun un certain nombre de points fixes infiniment voisins successifs de A. Nous désignerons ces points par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, h).

Observons que, parmi les solutions des congruences (1), nous avons $\mu = 1$, $\lambda = p - \alpha$. Les courbes C_0^* correspondantes passent $p - \alpha + 1$ fois par A et doivent passer par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., (α, h) nécessairement simplement. Comme le nombre des points d'intersection confondus en A est égal à p, on a $h = \alpha - 1$.

Si nous étendons aux points des domaines successifs de A sur F les dénominations de points unis de première et de seconde espèce, on voit que les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 2)$ sont unis de seconde espèce et le point $(\alpha, \alpha - 1)$ uni de première espèce pour l'involution.

En considérant les courbes C_α, on voit de même qu'elles passent par une suite de $\beta - 1$ points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$ infiniment voisins successifs de A; les $\beta - 2$ premiers de ces points sont unis de seconde espèce pour l'involution, le dernier uni de première espèce.

5 — Posons

$$p = a_1 \alpha + b_1, \quad (b_1 < \alpha).$$

Parmi les solutions des congruences (1), se trouve la solution

$$\lambda = b_1, \quad \mu = a_1.$$

Les courbes C_0^* qui lui correspondent passent $a_1 + b_1$ fois par A et a_1 fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$.

Envisageons maintenant les courbes C_0'. Sur chacune de ces courbes, le point A peut être l'origine de branches linéaires passant par $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et de branches superlinéaires passant par $(\alpha, 1)$ et se détachant de la suite $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 2)$ en certains points. On en conclut que les courbes C_0' ont en commun les points $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et un certain nombre de suites de points infiniment voisins successifs d'un point de la suite précédente. Chacune de ces suites se termine par un point uni de première espèce. Désignons par P_1, P_2, ..., P_k ces points.

Soient Γ_0 les sections hyperplanes de Φ, Γ'_0 celles de ces sections qui passent par A' et correspondent donc aux courbes C_0'. En projetant Φ de A' sur un hyperplan de l'espace ambiant, nous obtenons une surface Φ_1 dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'_0.

Sur Φ_1, aux domaines des points $(\alpha, \alpha - 1)$, $P_1, P_2, \ldots, P_k$ correspondent des courbes rationnelles que nous désignerons par $\sigma_\alpha, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$.

Supposons que les courbes C'_0, qui passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par A, passent $x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}$ fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$. On a

$$\mu_1 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{\alpha-1}$$

et d'autre part, puisque les courbes C'_0 rencontrent les courbes C_1 en p points confondus en A.

$$\lambda_1 + \mu_1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} = p.$$

Posons

$$\mu_1 = x_{\alpha-1} + y_0, x_1 = x_{\alpha-1} + y_1, \ldots, x_{\alpha-2} = x_{\alpha-1} + y_{\alpha-2}.$$

La relation précédente s'écrit

$$\lambda_1 + y_0 + y_1 + \ldots + y_{\alpha-2} + \alpha\, x_{\alpha-1} = p,$$

donc

$$\lambda' = \lambda_1 + y_0 + y_1 + \ldots + y_{\alpha-2}, \mu' = x_{\alpha-1}$$

est une solution des congruences (1).

On a $\lambda' \geqslant b_1$, donc $a_1 \geqslant \mu'$, c'est-à-dire $a_1 \geqslant x_{\alpha-1}$. D'autre part, les courbes $\Gamma''_0, \Gamma'''_0, \ldots, \Gamma^*_0$ qui correspondent sur Φ aux courbes $C''_0, C'''_0, \ldots, C^*_0$ ne peuvent rencontrer σ_α en un nombre de points inférieur à $x_{\alpha-1}$, puisque ce sont des courbes Γ'_0 particulières et que celles-ci coupent σ_α en $x_{\alpha-1}$ points. On a donc $x_{\alpha-1} = a_1$.

Les courbes C'_0 et de même les courbes $C''_0, C'''_0, \ldots$ qui précèdent C^*_0 passent donc a_1 fois par le point $(\alpha, \alpha - 1)$.

6 — On a

$$\lambda_1 + \mu_1 < a_1 + b_1,$$

par conséquent parmi les courbes des systèmes $|C_0'|$, $|C'''_0|$,... précédant $|C^*_0|$, il en est qui ne passent plus par $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ et qui passent une fois par P_k. Désignons par $C_0^{(i)}$ ces courbes.

Les courbes $C_0^{(i)}$ passent $\lambda_i + \mu_i$ fois par A, μ_i fois par les points $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, x)$, $y < \mu_i$ fois par $(\alpha, x+1)$, a_1 fois par $(\alpha, x+2), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$. On a

$$\lambda_i + (x+1)\ \mu_i + y + (\alpha - 2 - x)\, a_1 = p,$$

c'est-à-dire

$$\lambda_i + \mu_i + x\,(\mu_i - a_1) + y = 2a_1 + b_1.$$

Pour que l'on ait $\lambda_1 + \mu_1 < a_1 + b_1$, il doit exister un entier r tel que

$$(r-1)\, b_1 < \alpha < rb_1.$$

On a alors la solution

$$\lambda = rb_1 - \alpha, \mu = ra_1 + 1.$$

Soit m_1 le plus grand entier positif tel que

$$m_1\, \alpha < [m_1\,(r-1) + 1]\, b_1.$$

Les congruences (1) admettent les solutions

$$\left.\begin{aligned} \lambda'_{j+1} &= (m_1 - j)\,[(r-1)\, b_1 - \alpha] + b_1, \\ \mu'_{j+1} &= (m_1 - j)\,[(r-1)\, a_1 + 1] + a_1, \end{aligned}\right\} \quad (j = 0, 1, \ldots, m_1).$$

Pour $j = m_1$, on a $\lambda^* = \lambda'_{m_1+1}$, $\mu^* = \mu'_{m_1+1}$.

Les courbes $C_0^{(i)}$, qui passent simplement par P_k, doivent correspondre à la solution donnée par $j = m_1 - 1$, c'est-à-dire

$$\lambda'_{m_1} = rb_1 - \alpha, \quad \mu'_{m_1} = ra_1 + 1.$$

On doit donc avoir

$$r\,(a_1 + b_1) - (\alpha - 1) + x\,[(r-1)\, a_1 + 1] + y = 2a_1 + b_1.$$

En posant

$$\alpha - 1 - (r-1)\, b_1 = \theta\,[(r-1)\, a_1 + 1] + \eta,$$

on a

$$x = \theta - 1, \ y = a_1 + \eta + 1.$$

Passons maintenant à la solution correspondant à $j = m_1 - 2$. On trouve, en exprimant que la somme des multiplicités des courbes correspondant aux points A, $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ est égale à p, que ces courbes passent nécessairement deux fois par P_k. Et ainsi de suite. Finalement, on trouve $k = 1$,

$$\lambda_1 = m_1[(r-1)\,b_1 - \alpha] + b_1, \quad \mu_1 = m_1[(r-1)\,a_1 + 1] + a_1.$$

Les courbes C'_0 passent $\lambda_1 + \mu_1$ fois par A, μ_1 par $(\alpha, 1), \ldots, (\alpha, \theta - 1)$, $a_1 + m_1(\eta + 1)$ fois par (α, θ), a_1 fois par $(\alpha, \theta + 1), \ldots, (\alpha, \alpha - 1)$ et m_1 fois par un point que nous désignerons dorénavant par P_α. Ces courbes passent par une série de points fixes infiniment voisins successifs de (α, θ), dont le dernier est P_α.

7 — On introduit de même un entier s tel que

$$(s-1)\,a_2 < \beta < s a_2,$$

en posant

$$p = b_2\,\beta + a_2, \qquad (a_2 < \beta)$$

et le plus grand entier m_2 tel que l'on ait

$$m_2\,\beta < [m_2(s-1) + 1]\,a_2.$$

Les congruences (1) ont alors les solutions

$$\begin{aligned} \lambda''_{j+1} &= (m_2 - j)\,[(s-1)\,b_2 + 1] + b_2, \\ \mu''_{j+1} &= (m_2 - j)\,[(s-1)\,a_2 - \beta] + a_2. \end{aligned} \qquad (j = 0, 1, \ldots, m_2).$$

On a $\lambda''_1 = \lambda_1$, $\mu''_1 = \mu_1$ et si l'on pose

$$\beta - 1 - (s-1)\,a_2 = \theta'\,[(s-1)\,b_2 + 1] + \zeta,$$

on voit que les courbes C'_0 passent λ_1 fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, \theta' - 1)$, $b_2 + m_2(\zeta + 1)$ fois par (β, θ'), b_2 fois par $(\beta, \theta' + 1), \ldots, (\beta, \beta - 1)$, puis m_2 fois par un point P_β qui termine une suite de points infiniment voisins successifs de (β, θ').

Sur la surface Φ_1, il correspond aux domaines des points $(\alpha, \alpha - 1)$, P_α, P_β, $(\beta, \beta - 1)$ des courbes rationnelles σ_α, τ_α, τ_β, σ_β respectivement d'ordres a_1, m_1, m_2, b_2.

L'examen des systèmes $|\Gamma''_0|$, $|\Gamma'''_0|$,... montre que les courbes σ_α, τ_α se coupent en un point A'_α, les courbes τ_α, τ_β en un point A'_1, les courbes τ_β, σ_β en un point A'_β. Ces courbes n'ont aucun point commun en dehors de ces trois points.

Nous avons montré, par des exemples, que les points A'_α, A'_1, A'_β peuvent être simples ou doubles pour la surface Φ_1.

La structure du point de diramation A' est donc constituée par un certain nombre de courbes rationnelles

$$\sigma_\alpha,\ \omega'_1,\ \ldots,\ \omega'_u,\ \tau_\alpha,\ \rho_1,\ \ldots,\ \rho_t,\ \tau_\beta,\ \omega''_1,\ \ldots,\ \omega_v,\ \sigma_\beta,$$

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point, mais ne rencontrant pas les autres.

Les courbes $\omega'_1, \ldots, \omega'_u$ sont de degré virtuel — 2 et n'existent que si A'_α est double pour Φ_1. Les courbes $\rho_1, \ldots, \rho_t$, $\omega''_1, \ldots, \omega''_v$ sont aussi de degré virtuel — 2 et n'existent que si A'_1 et A'_β sont doubles pour Φ_1.

Si $h_\alpha = h_\beta = 1$, le cône tangent à Φ_1 en A' se scinde en deux cônes rationnels, car on a $m_1 = m_2 = 0$.

Si un seul des nombres h_α, h_β est égal à l'unité, le cone tangent se scinde en trois cônes rationnels.

Enfin si h_α et h_β sont tous deux supérieurs à l'unité, le cône tangent se scinde en quatre cônes rationnels.

8 — La théorie des involutions nous a permis de prouver l'existence de certaines surfaces algébriques de propriétés assignées ([5]).

Commençons par les surfaces dont le diviseur de Severi est quelconque.

En 1908, M. Severi a introduit le diviseur σ d'une surface algébrique ([6]). Etant donné, sur une surface algébrique F, de diviseur σ, un système linéaire $|C_1|$, il existe au plus $\sigma - 1$ systèmes linéaires $|C_2|, |C_3|, \ldots$ tels que les systèmes complets $|\lambda C_1|, |\lambda C_2|, |\lambda C_3|, \ldots$ coïncident (et le maximum peut être atteint). A cette époque, une seule surface de diviseur $\sigma > 1$ était connue : la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, dont le diviseur est $\sigma = 2$. La théorie des involutions permet d'en construire d'autres.

Reprenons la surface F du début et supposons que l'involution I soit *privée de points unis*. Dans le système $|C|$ de ses sections hyperplanes, il existe p systèmes linéaires partiels, privés de points-base, appartenant à l'involution. Soient $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_p|$ ces systèmes, $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_p|$ les systèmes qui leur correspondent sur Φ.

Envisageons une courbe C quelconque; il lui correspond sur Φ une courbe Γ qui correspond également aux courbes que l'homographie T et ses puissances font correspondre à C. Faisons varier C d'une manière continue dans $|C|$ et supposons qu'elle tende vers une courbe C_1. La courbe Γ tendra vers une courbe Γ_1 comptée p fois. De même, si C tend vers une courbe C_2, la courbe Γ tendra vers une courbe Γ_2 comptée p fois. Et ainsi de suite. Les systèmes linéaires $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, ..., |\Gamma_p|$ sont distincts par construction, mais les systèmes complets $|p\Gamma_1|, |p\Gamma_2|, ..., |p\Gamma_p|$ coïncident avec le système $|\Gamma|$. Il en résulte que la surface Φ a le diviseur de Severi $\sigma = p$. Et il est aisé de construire des exemples [7].

On peut remarquer que le raisonnement précédent est valable même si p n'est pas premier. Récemment, M. Andreotti a réussi à démontrer que les surfaces dont le diviseur de Severi σ est supérieur à l'unité, pouvaient s'obtenir par ce procédé [8].

9 — On sait que les conditions pour qu'une surface soit rationnelle sont $p_a = P_2 = 0$ (Castelnuovo). Il existe des surfaces pour lesquelles on a $p_a = 0$, $P_2 = 1$ (Enriques) et des surfaces pour lesquelles $p_a = 0$, $P_2 > 1$, mais pour celles-ci, les systèmes bicanonique et pluricanoniques sont composés au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques. La question qui se pose est de savoir s'il existe des surfaces ayant les caractères précédents, mais dont les systèmes pluricanoniques ne sont pas composés au moyen d'un faisceau de courbes elliptiques.

Soit F une surface contenant une involution cyclique d'ordre premier p privée de points unis. Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de Φ, nous avons établi que l'on a la relation

$$p_a + 1 = p\,(p'_a + 1).$$

Si l'on a $p = p_a + 1$, on trouve $p'_a = 0$. Dans le système canonique de F, il y a alors $p - 1$ courbes unies pour l'involution; il leur correspond sur Φ des courbes qui ne peuvent être des courbes canoniques de cette surface.

Si l'on suppose que F est la surface du cinquième ordre la plus générale transformée en elle-même par l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : \varepsilon x_2 : \varepsilon^2 x_3 : \varepsilon^3 x_4,$$

où ε est une racine primitive cinquième de l'unité, on trouve que la surface Φ a les genres [9]

$$p_a = p_g = 0,\ p^{(1)} = P_2 = 2;\ P_3 = 4,...$$

Nous avons aussi construit une surface de genres [10]

$$p_a = p_g = 0,\ p^{(1)} = P_2 = 3,\ P_3 = 7,...$$

10 — On peut également construire des surfaces irrégulières de la manière suivante :

Considérons une courbe L de genre π, contenant une involution cyclique γ d'ordre premier $p > 2$ et soit F la surface qui représente les couples de points de L.

Fixons l'attention sur deux groupes $A_1, A_2, ..., A_p$ et $A'_1, A'_1, ..., A'_p$ de γ et désignons par A_{ik} le point de F qui représente le couple $A_iA'_k$. Nous avons ainsi, sur F, p^2 points qui, lorsque les groupes varient, engendrent une involution I′ dont la surface image est celle, F′, qui représente les couples de points de la courbe L′, image de γ. L'involution I′ possède d'ailleurs une infinité de points unis.

Supposons que la transformation birationnelle de L en soi, t, génératrice de γ, fasse correspondre A_{i+1} à A_i et A'_{k+1} à A'_k. Au point A_{ik} de F correspond le point $A_{i+1,\,k+1}$ et on a ainsi une transformation birationnelle T de F en elle-même, de période p, qui engendre une involution cyclique I d'ordre p. Un groupe de I′ est formé de p groupes de I et si Φ est une surface image de I, aux groupes de I′ correspondent sur Φ des groupes de p points formant une involution I″ dont F′ est une image. Si la courbe L′ est de genre $\pi' > 0$, F′ est une surface d'irrégularité π', F une surface d'irrégularité π et la surface Φ est certainement irrégulière.

L'involution I′ possède une infinité de points unis, mais l'involution I n'en possède qu'un nombre fini; à savoir les points qui représentent les couples de points unis, distincts ou non, de l'involution γ sur L. Nous avons pu ainsi construire des surfaces irrégulières [11].

Observons que si L′ est rationnelle, la surface Φ peut être régulière et même rationnelle. Ce dernier cas se présente lorsque la courbe L, de genre trois, possède une involution cyclique γ d'ordre sept [12].

11 — Une dernière application de la théorie des involutions concerne la construction de surfaces dont le système canonique possède des composantes fixes non exceptionnelles.

Reprenons la structure du point de diramation A′ de la surface Φ. Elle est formée de quatre courbes σ_α, τ_α, τ_β, σ_β dont les degrés virtuels sont respectivement $-(a_1+1)$, $-(m_1+2)$, $-(m_2+2)$, $-(b_2+1)$ et de courbes de degré virtuel -2, sans influence sur le système canonique de Φ.

Les courbes canoniques K′ de Φ doivent rencontrer les courbes σ_α, τ_α, τ_β, σ_β respectivement en a_1-1, m_1, m_2, b_2-1 points; il leur correspond sur F des courbes canoniques K, formant un système en général incomplet, passant a_1-1 fois par le point $(\alpha, \alpha-1)$, m_1 fois par P_α, m_2 fois par P_β et b_2-1 fois par $(\beta, \beta-1)$. Cela suffit pour déterminer le comportement des courbes K au point A.

Prenons par exemple comme surface F une surface d'ordre $3\nu+1$ d'équation

$$a_1x_1^{3\nu}\,x_2 + a_2x_2^{3\nu}\,x_3 + a_3x_3^{3\nu}\,x_1 + a_4x_4^{3\nu+1} = 0$$

Elle est transformée en soi par une homographie d'ordre $p = 9\nu^2 - 3\nu + 1$, nombre que nous supposerons premier. Cette homographie détermine sur F une involution d'ordre p ayant trois points unis: les sommets du tétraèdre de référence appartenant à la surface.

Sur la surface Φ, image de cette involution, le système canonique est formé de trois courbes de degré virtuel $-(\nu+1)$, ne se rencontrant pas deux à deux et d'une partie variable formée de $\nu-1$ courbes elliptiques d'un faisceau linéaire. Le système bicanonique est irréductible ([13]).

BIBLIOGRAPHIE

(1) Acta Mathematica, t. 32, 1909, pp. 283-392; t. 33, 1910, pp. 321-399.

(2) *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* (Mem. Soc. Italiana delle Scienze, 1908, pp. 251-343). *Le nombre ρ_0 de M. Picard pour les surfaces hyperelliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* (Rend. Circ. Matem. di Palermo, t. 30, 1910, pp. 185-238).

(3) Pour les indications bibliographiques, voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualités scientifiques, N° 270 (Paris, Hermann, 1935).

(4) *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 1680); *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples*, Deuxième Colloque de Géométrie algébrique, Liège, 1952 (Paris, Masson, et Liège, Thone, 1952); *Sur l'ordre d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique* (Bull. Soc. roy. Sciences de Liège, 1953, pp. 77-84); *Recherches sur les points de diramation de troisième catégorie des surfaces multiples* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1953, pp. 1013-1023, 1087-1093; 1954, pp. 81-86, 200-208, 355-370).

(5) *Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Colloque de Géométrie algébrique, Liège, 1949 (Paris, Masson, et Liège, Thone, 1949).

(6) *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1908, pp. 449-468).

(7) *Sur certaines surfaces de diviseur supérieur à l'unité* (Bull. de l'Acad. de Cracovie, 1914, pp. 362-368), *Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1915, pp. 182-185).

(8) *Recherches sur les surfaces algébriques irrégulières* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 1-36).

(9) *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (Rendiconti dell'Accad. dei Lincei, 2° sem. 1931, pp. 479-481), *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1932, pp. 26-37). Voir aussi notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls*. Actualités scient., N° 123 (Paris, Hermann, 1934). M. Campedelli (Rend. Accad. Lincei, 1932) a déterminé des plans doubles de genres zéro, non rationnels.

(10) *Sur la construction de surfaces non rationnelles de genres zéro* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1949, pp. 688-693).

(11) Voir une série de notes parues dans le Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1943, pp. 815-822; 1944, pp. 11-18; 1946, pp. 427-440; 1946, pp. 457-464; 1947, pp. 22-32, 33-38, 67-76. Voir aussi : *Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari* (Rend. Accad. naz. dei Lincei, juin 1949, pp. 694-696).

(12) *Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (Bull. des Sc. Mathém., 1933, pp. 7-14).

(13) *Construction d'une surface dont le système canonique possède des composantes fixes* (Rend. Circ. Matem. Palermo, 1952, pp. 49-56).