EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.*
Séance novembre-décembre 1945. — N° 11-12.

Sur quelques variétés réglées à trois dimensions,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

En cherchant à construire des surfaces algébriques contenant des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, nous avons rencontré le problème suivant : Appelons surface de Veronese d'ordre n^2 la surface obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions, les courbes d'ordre n d'un plan. Soient alors deux surfaces de Veronese d'ordres m^2, n^2 situées dans des espaces indépendants, appartenant à l'espace de dimension minimum. Étudier la variété engendrée par les droites joignant les points des deux surfaces correspondants à un même point du plan. C'est à cette étude qu'est consacrée la présente note.

Le cas $n=1$, $m=2$ a été rencontré par MM. Severi et Bompiani dans une séance du R. Istituto Nazionale di Alta Metematica (voir *Rendiconti di Matematica della R. Università di Roma*, 1940, pp. 98 et suiv.).

1. Soient, dans un espace linéaire S_r à $r=\frac{1}{2}(n^2+5n+2)$ dimensions, un espace linéaire S_n à n dimensions et un espace linéaire S_ν à $\nu=\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions n'ayant aucun point commun. Rapportons projectivement les hyperquadriques de S_n aux hyperplans de S_ν ; nous obtenons ainsi, dans S_ν, une variété de Veronese F_n, d'ordre 2^n, en correspondance birationnelle, sans exception, avec l'espace S_n.

Considérons la variété V_{n+1} lieu des droites joignant les points homologues de l'espace S_n et de la variété F_n.

Désignons par $x_0, x_1, \ldots, x_n$ les coordonnées projectives des points de l'espace S_n et par $x_{00}, x_{01}=x_{10}, \ldots, x_{nn}$ celles des points de l'espace S_ν. Les coordonnées projectives d'un point quelconque de S_r sont alors $x_0, x_1, \ldots, x_n; x_{00}, x_{01}, \ldots, x_{nn}$.

Les équations paramétriques de la variété de Veronese F_n de S_ν sont

$$\rho x_{00}=x_0^2,\ \rho x_{01}=x_0 x_1, \ldots, \rho x_{nn}=x_n^2,$$

de telle sorte que les coordonnées d'un point de la droite de la variété V_{n+1} joignant le point x de S_n au point homologue de la variété F_n sont de la forme

$$\rho X_0=\lambda x_0, \rho X_1=\lambda x_1, \ldots, \rho X_n=\lambda x_n, \rho X_{00}=x_0^2, \rho X_{01}=x_0 x_1, \ldots,$$
$$\rho X_{nn}=x_n^2.$$

Interprétons $x_0, x_1, \ldots, x_n, \lambda=x_{n+1}$ comme coordonnées projectives d'un point d'un espace linéaire S_{n+1}. A un point de V_{n+1} correspond un et un seul point de S_{n+1} et inversement. A la section de V_{n+1} par un hyperplan

$$\xi_0 X_0+\varphi_1 X_1+\ldots+\xi_n X_n+\xi_{00} X_{00}+\xi_{01} X_{01}+\ldots+\xi_{nn} X_{nn}=0$$

correspond dans S_{n+1} l'hyperquadrique

$$x_{n+1}(\xi_0 x_0+\xi_1 x_1+\ldots+\xi_n x_n)+\xi_{00} x_0^2+\xi_{01} x_0 x_1+\ldots+\xi_{nn} x_n^2=0,$$

passant par le point $O\,(x_0=x_1=\ldots=x_n=0)$.

Ainsi donc, la variété V_{n+1} représente le système linéaire des hyperquadriques de S_{n+1} passant par un point. On en conclut que :

La variété V_{n+1} *est d'ordre* $2^{n+1}-1$.

La variété V_{n+1} *contient* ∞^{n+1} *variétés de Veronese* F_n *correspondant aux hyperplans de* S_{n+1}.

La variété V_{n+1} *contient* ∞^n *variétés* V_n (dont la définition s'obtient en remplaçant dans ce qui précède n par $n-1$) correspondant aux ∞^n hyperplans de S_{n+1} passant par le point O. Ces variétés V_n sont formées par les droites passant par les points d'un hyperplan de S_n et par les points homologues de la variété de Veronese correspondante sur la variété F_n.

Aux points infiniment voisins de O correspondent les points de S_n.

2. Dans le cas où n est égal à un ou deux l'ordre de la variété V_{n+1} peut être obtenu de la manière suivante :

Supposons $n=1$. La variété de Veronese F_1 est alors une conique et S_1 est une droite ne rencontrant pas le plan de F_1, le tout appartenant à un espace à $r=4$ dimensions.

La surface V_2 passe simplement par F_1 et par S_1. Projetons V_2 d'un point de F_1 sur un hyperlan S_3 passant par S_1; la projection de V_2 est le lieu des droites joignant les points homologues de deux droites projectives et est par suite une quadrique. Par conséquent, V_2 est une surface cubique.

Supposons $n=2$. La variété F_2 est une surface de Veronese d'ordre quatre appartenant à un espace S_5; le plan S_2 et l'espace S_5 appartiennent à un espace à huit dimensions. La variété V_3 passe simplement par la surface F_2. Projetons cette variété de trois points A_1, A_2, A_3 quelconques, non situés sur une même conique, de F_2, sur un espace linéaire S'_5 passant par le plan S_2. A F_2 correspond un plan S'_2 de S'_5 et aux ∞^2 coniques de la surface F_2 correspondent dans S'_2 les coniques passant par trois points A'_1, A'_2, A'_3. En effet, les points A_2, A_3, par exemple, déterminent une conique de F_2 qui, avec A_1, détermine un espace S_3 coupant S'_2 en un point A'_1. Les coniques de F_2 se coupant deux à deux en un point, les projections sur S'_2 des coniques de F_2 passent par A'_1. Elles passent de même par A'_2, A'_3.

A une droite S_2 correspond une conique de F_2 et par conséquent, les plans S_2, S'_2 sont liés par une correspondance birationnelle faisant correspondre aux droites de S_2 les coniques de S'_2 passant par les trois points A'_1, A'_2, A'_3, c'est-à-dire par une correspondance quadratique.

Soit S''_2 un troisième plan de S'_5 ne rencontrant ni S_2, ni S'_2. Par un point P'_1 de S'_2 passe une droite s'appuyant sur S_2 et S''_2. Soit P le point d'appui de cette droite sur S_2; à ce point correspond dans S'_2 un point P'_2 par la correspondance birationnelle considérée plus haut. Les points P'_1, P'_2 se correspondent dans une transformation quadratique et il y a par conséquent quatre points unis. Il y a donc quatre droites joignant des points homologues de S_2, S'_2 et s'appuyant sur S''_2. Il en résulte que la projection de V_3 sur S'_5 est du quatrième ordre; donc V_3 est du septième ordre.

Signalons en passant que la section de la variété V_3 par une hyperquadrique est une surface normale de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Les surfaces V_2 appartenant à V_3 découpent, sur cette surface, des courbes du sixième ordre et de genre deux, formant un réseau. Cette surface n'est pas à modules généraux.

La section de la variété V_3 par une hypersurface cubique est une surface normale projectivement canonique (c'est-à-dire dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques), de genres $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 22$.

3. Considérons maintenant, dans un espace S_{15} à quinze dimensions, deux espaces S_5, S_9 n'ayant aucun point commun. Rapportons projectivement les coniques d'un plan σ aux hyperplans de S_5 et les cubiques du même plan aux hyperplans de S_9. On obtient ainsi, dans S_5, une surface de Veronese F d'ordre quatre et dans S_9, une surface de Veronese d'ordre neuf, F′, liée à F par une correspondance birationnelle, deux points homologues correspondant à un même point de σ. Appelons encore V_3 la variété lieu des droites joignant les points homologues de F, F′

Nous disposerons de la figure de référence dans S_{15} de telle sorte que les espaces S_5, S_9 appartiennent à cette figure; nous désignerons les coordonnées d'un point de S_5 par x_{00}, $x_{01} = x_{10}$, ..., x_{22} et celles d'un point de S_9 par x_{000}, $x_{001} = x_{010} = x_{100}$, ..., x_{222}. Un point de S_{15} aura alors pour coordonnées l'ensemble de ces nombres.

Cela étant, les équations paramétriques des surfaces F, F′ seront respectivement

$$\rho x_{00} = x_0^2,\ \rho x_{01} = x_0 x_1, \ldots, \rho x_{22} = x_2^2,$$
$$\rho x_{000} = x_0^3,\ \rho x_{001} = x_0^2 x_1, \ldots, \rho x_{222} = x_2^3,$$

x_0, x_1, x_2 étant les coordonnées d'un point du plan σ. Les coordonnées d'un point de la variété V_3 sont alors de la forme

$$\rho X_{00} = \lambda x_0^2, \ldots, \rho X_{22} = \lambda x_2^2,\ \rho X_{000} = x_0^3, \ldots, \rho X_{222} = x_2^3.$$

Interprétons x_0, x_1, x_2, $\lambda = x_3$ comme coordonnées des points d'un espace S_3. Nous obtenons ainsi une représentation birationnelle de V_3 sur cet espace; aux points de la section de V_3 par l'hyperplan

$$\xi_{00} X_{00} + \ldots + \xi_{22} X_{22} + \xi_{000} X_{000} + \ldots + \xi_{222} X_{222} = 0$$

correspondent ceux de la surface cubique

$$x_3(\xi_{00}x_0^2 + \dots + \xi_{22}x_2^2) + \xi_{000}x_0^3 + \dots + \xi_{222}x_2^3 = 0,$$

ayant un point double en O (0,0,0,1).

La variété V_3 représente le système complet des surfaces cubiques de S_3 ayant un point double en un point donné; elle est d'ordre 19.

Aux point infiniment voisins de O correspondent les points de la surface F. Aux plans de l'espace S_3 correspondent sur V_3 ∞^3 surfaces de Veronese d'ordre neuf. Aux plans passant par O correspondent des surfaces d'ordre cinq lieux des droites joignant les points d'une conique de F aux points homologues de la cubique gauche correspondante de F'. Une telle surface appartient à un espace linéaire à six dimensions. Aux cônes du second ordre de sommet O correspondent sur V_3 des surfaces d'ordre dix lieux des droites s'appuyant en des points homologues sur une section hyperplane de F et sur la courbe rationnelle du sixième ordre correspondante sur F'. Ces surfaces appartiennent à des espaces linéaires à onze dimensions.

La section de la variété V_3 par une hyperquadrique contenant une de ces surfaces d'ordre dix est une surface de genres un, d'ordre 28, à sections hyperplanes de genre 15.

La section de la variété V_3 par une hypersurface cubique contenant de même une de ces surfaces d'ordre dix est une surface projectivement canonique, d'ordre 47, de genres $p_a = p_g = 16$, $p^{(1)} = 48$.

La section de la variété V_3 par une hyperquadrique est une surface d'ordre 38, de genres $p_a = p_g = 9$, $p^{(1)} = 9$. Les courbes canoniques sont découpées sur cette surface par les surfaces d'ordre 10 rencontrées plus haut. Ces courbes sont hyperelliptiques et le système canonique est donc composé au moyen d'une involution du second ordre.

4. Soient, dans un espace S_{11} à onze dimensions, un plan S_2 et un espace S_9 n'ayant aucun point commun. Considérons dans S_9 la surface F de Veronese d'ordre 9 représentant les cubiques du plan S_2. Envisageons ensuite la variété V_3 lieu des droites passant par deux points homologues du plan S_2 et de la surface F.

En raisonnant comme plus haut, on voit qu'un point de la variété V_3 a des coordonnées qui peuvent s'écrire

$$\rho X_0 = \lambda x_0, \rho X_1 = \lambda x_1, \rho X_2 = \lambda x_2, \rho X_{000} = x_0^3, \dots, \rho X_{222} = x_2^3.$$

Posons $\lambda = x^2_3$ et interprétons x_0, x_1, x_2, x_3 comme coordonnées d'un point d'un espace S_3. Aux sections hyperplanes de V_3 correspondent dans S_3 des surfaces cubiques qu'on peut représenter par

$$x_3^2 \varphi_1 (x_0, x_1, x_2) + \varphi_3 (x_0, x_1, x_2) = 0,$$

φ_1 et φ_3 étant des formes algébriques de degrés un et trois respectivement, à coefficients variables. Ces surfaces sont invariantes pour l'homologie harmonique

$$X_0^\gamma : X_0^\gamma : X_2^\gamma : X_3^\gamma = X_0 : X_1 : X_2 : X_3,$$

et la variété V_3 est l'image de l'involution du second ordre engendrée par cette homologie.

Il en résulte que la variété V_3 est d'ordre treize.

Aux ∞^5 quadriques de S_3, invariantes pour l'homologie, correspondent sur V_3 ∞^6 surfaces de Veronese d'ordre neuf. Aux ∞^2 plans passant par le point O (0,0,0,1) correspondent ∞^2 surfaces d'ordre quatre, lieux des droites joignant les points homologues d'une droite de S_2 et de la cubique gauche correspondante de F.

5. Plus généralement, considérons deux espaces linéaires S_μ, S_ν, respectivement à

$$\mu = \tfrac{1}{2}\, m\,(m+3), \quad \nu = \tfrac{1}{2}\, n\,(n+3)$$

dimensions, sans point commun, appartenant à un espace linéaire S_r à $r = \mu + \nu + 1$ dimensions. Rapportons projectivement les courbes d'ordre m d'un plan σ aux hyperplans de S_μ et les courbes d'ordre n du même plan aux hyperplans de S_ν. Nous obtenons dans S_μ une surface de Veronese F_1 d'ordre m^2 et dans S_ν une surface de Veronese F_2 d'ordre n^2. Les surfaces F_1, F_2 sont liées par une correspondance birationnelle sans exception, deux points homologues correspondant à un même point du plan σ. Nous supposerons $m > n$.

La variété réglée V_3, lieu des droites passant par les points homologues de F_1, F_2, a pour image de ses sections hyperplanes, dans un espace S_3, les surfaces d'ordre m,

$$x_3^{m-n} \varphi_n (x_0, x_1, x_2) + \varphi_m (x_0, x_1, x_2) = 0, \tag{1}$$

où φ_n, φ_m sont des formes algébriques de degrés m, n, à coefficients variables. Ces surfaces ont au point O (0,0,0,1) la multiplicité n.

Si ε est une racine primitive d'ordre m-n de l'unité, les surfaces (1) sont transformées en elles-mêmes par l'homologie

$$X_0^\gamma : X_1^\gamma : X_2^\gamma : X_3^\gamma = X_0 : X_1 : X_2 : \varepsilon X_3 \qquad (2)$$

et elles forment un système linéaire composé au moyen de l'involution, engendrée par cette homologie. La variété V_3 est l'image de cette involution et par conséquent

La variété V_3 *est d'ordre* $m^2 + mn + n^2$.

Aux $\infty^{\frac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)}$ surfaces d'ordre m-n,

$$x_3^{m-n} = \varphi_{m-n}(x_0, x_1, x_2),$$

invariantes pour l'homologie (2), correspondent sur V_3 des surfaces d'ordre m, qui sont des surfaces de Veronese.

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)