

GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Sur les involutions irrégulières
appartenant à une surface irrégulière.

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Dans cette note, nous considérons une involution cyclique d'irrégularité q' , d'ordre premier p , n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface F , d'irrégularité $q > q'$. Nous construisons sur F un système continu complet $\{C\}$, transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de F en soi génératrice de l'involution ; nous étudions la distribution dans $\{C\}$ des systèmes linéaires transformés en eux-mêmes par T .

La variété de Picard V associée à la surface F , contient un système d'indice un, de dimension $q - q'$, de variétés V' à q' dimensions et un second système d'indice un, de dimension q' , de variétés W à $q - q'$ dimensions. A la transformation T correspond une transformation T' de V en soi, de même période p . La transformation T' transforme en elle-même chacune des variétés W ; elle échange entre elles les variétés V' et il y a un nombre fini de variétés V' sur lesquelles T' se réduit à l'identité. A ces variétés V' correspondent des systèmes continus de systèmes linéaires $|C|$ transformés chacun en lui-même par T . On en conclut qu'en général, le diviseur de Severi σ de la surface image de l'involution est supérieur à l'unité.

Nous avons utilisé les résultats obtenus par M. Castelnuovo sur les systèmes continus de courbes appartenant à une surface algébrique ⁽¹⁾. Nous supposons d'autre part connues les propriétés des involutions appartenant à une surface algébrique, n'ayant qu'un nombre fini de points unis ⁽²⁾.

1. Soit F une surface algébrique d'irrégularité $q > 0$, contenant une involution cyclique I_p , d'ordre premier p , n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous désignons par Φ une surface image de l'involution I_p et nous supposerons que Φ est irrégulière, son irrégularité q' étant inférieure à q ($0 < q' < q$). Soit T la transformation birationnelle de F en soi, génératrice de I_p .

Construisons, sur la surface F , un système linéaire $|C|$, transformé en lui-même par T et contenant un système linéaire partiel appartenant à I_p et dépourvu de points-base. On peut toujours, en remplaçant éventuellement $|C|$ par un de ses multiples d'ordre assez élevé, supposer que $|C|$ est un système régulier, appartenant à un système continu complet $\{C\}$, formé de ∞^q systèmes linéaires analogues à $|C|$.

Considérons un système linéaire $|C^*|$ de $\{C\}$, distinct de $|C|$. La transformation T lui fait correspondre un système linéaire $|C^{**}|$. Faisons varier $|C^*|$ d'une manière continue dans $\{C\}$ en le faisant tendre vers $|C|$. Le système linéaire $|C^{**}|$ varie d'une manière continue sur F et tend vers $|C|$ également. Comme le système continu $\{C\}$ est complet, il comprend le système continu engendré par $\{C^{**}\}$ et le système $\{C\}$ est donc transformé en lui-même par T .

⁽¹⁾ *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (REND. R. ACCAD. LINCEI, 1905, 1^o sem.). Opere Scelte, XXVII (Bologne, Zanichelli, 1937).

⁽²⁾ Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935).

2. Le système $|C|$ contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p ; désignons-les par $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_p|$. A ces systèmes correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_p|$. On peut d'ailleurs supposer que le système $|\Gamma_1|$ est régulier, en remplaçant éventuellement $|C|$ par un de ses multiples d'ordre suffisamment élevé.

Le système $|\Gamma_1|$ appartient à un système continu complet $|\Gamma_1|$ formé de $\infty^{q'}$ systèmes linéaires analogues à $|\Gamma_1|$.

Au système $\{\Gamma_1\}$ correspond, sur F , un système continu formé de $\infty^{q'}$ systèmes linéaires appartenant à $\{C\}$ et comprenant le système linéaire $|C|$ dont on est parti. Chacun de ces $\infty^{q'}$ systèmes linéaires est transformé en lui-même par T . Nous désignerons ce système continu par $\{C_0\}$.

Soit V la variété de Picard, à q dimensions, associée à la surface F et soit Ω la variété de Picard, à q' dimensions, associée à la surface Φ . Aux systèmes linéaires de $\{C_0\}$ correspondent, sur la variété V , les points d'une variété V' , à q' dimensions.

A un point de Ω correspond un système de $\{\Gamma_1\}$; à ce système, correspond un système de $\{C_0\}$ et à ce système, correspond un point de la variété V' .

Observons que sur Φ , lorsque le système linéaire $|\Gamma_1|$ décrit $\{\Gamma_1\}$, les systèmes linéaires $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$, ..., $|\Gamma_p|$ engendrent des systèmes continus $\{\Gamma_2\}$, $\{\Gamma_3\}$, ..., $\{\Gamma_p\}$. Mais ces systèmes ne sont pas nécessairement distincts de $\{\Gamma_1\}$. C'est ce qui peut notamment se produire quand l'involution I_p est dépourvue de points unis; dans ce cas particulier, les p systèmes $\{\Gamma_2\}$, $\{\Gamma_3\}$, ..., $\{\Gamma_p\}$ peuvent en effet coïncider avec $\{\Gamma_1\}$. Dans tous les cas, à un système linéaire de $\{C_0\}$ correspondent des systèmes linéaires de $\{\Gamma_1\}$ en nombre fini. Par conséquent, à un point

de V' correspond un nombre fini de points de la variété Ω .

La variété V' est l'image d'une involution appartenant à la variété Ω . Cette involution est privée de points unis, car d'après les hypothèses faites, à un système linéaire de $\{C_0\}$ correspondent toujours p systèmes linéaires distincts de $\{\Gamma_1\}$, $\{\Gamma_2\}$, ..., $\{\Gamma_p\}$. Il en résulte que la variété V' est abélienne.

On pourrait d'ailleurs arriver à la même conclusion en formant, dans le système $\{C_0\}$, un groupe $\infty^{q'}$ de transformations, comme M. Castelnuovo a formé le groupe de transformations de V dans sa note citée.

3. La variété de Picard V contenant une variété abélienne V' , à q' dimensions, en contient, comme M. Castelnuovo l'a établi, $\infty^{q-q'}$ formant un système $\{V'\}$ d'indice un. Il existe d'autre part, sur V , un second système $\{W\}$, d'indice un, de variétés à $q - q'$ dimensions; $\{W\}$ a la dimension q' et toute variété W rencontre toute variété V' en un nombre fini de points.

La transformation T transforme en lui-même le système $\{C\}$, par conséquent il lui correspond une transformation birationnelle de V en elle-même; soit T' cette transformation. Elle a nécessairement la période p ou se réduit à l'identité.

Considérons une variété W ; il lui correspond sur F un système continu $\infty^{q-q'}$ de systèmes linéaires $|C|$, comprenant un nombre fini de systèmes de $\{C_0\}$. Désignons par $\{\bar{C}\}$ le système continu qui correspond à la variété W envisagée.

A un système $|\bar{C}|$ de $\{\bar{C}\}$, T fait correspondre un système de $\{C\}$. Lorsque le système $|\bar{C}|$ envisagé varie d'une manière continue dans $\{\bar{C}\}$ et vient coïncider avec un système appartenant à la fois à $\{C_0\}$ et à $\{\bar{C}\}$, le système transformé vient coïncider avec le même système. Il en résulte que la variété W est

transformée en elle-même par T' . Et il en est de même de chaque variété W de $\{W\}$.

Observons que la transformation T' ne peut être l'identité. Dans cette hypothèse en effet, chaque système linéaire de $\{C\}$ serait transformé en lui-même par T et il lui correspondrait sur Φ un système linéaire $|\Gamma_1|$. On aurait ainsi, sur la surface Φ d'irrégularité q' , un système continu de dimension $q > q'$, ce qui est impossible.

4. La transformation T' a donc la période p , mais se réduit à l'identité sur la variété V' qui représente le système $\{C_0\}$. Comme elle transforme en elle-même chaque variété W , elle transforme en lui-même le système $\{V'\}$.

Sur une variété W , T' possède comme points unis les points d'intersection avec la variété V'_0 qui représente $\{C_0\}$. Supposons qu'il y ait un autre point uni, P , et soit $|C_P|$ le système linéaire qui correspond à ce point sur F . Soit V'_P la variété V' passant par P . Il lui correspond sur F un système continu contenant $|C_P|$. On peut recommencer sur $|C_P|$ et sur le système continu en question le même raisonnement que l'on a fait sur $|C|$ au début. On en conclut que tous les systèmes linéaires de ce système continu sont transformés chacun en soi par T . Par conséquent, T' se réduit à l'identité sur V'_P .

Cela étant, il ne peut exister une infinité de variétés V' sur lesquelles T' se réduit à l'identité, car elles formeraient nécessairement un système continu et on aurait sur Φ un système continu formé de systèmes linéaires, de dimension supérieure à q' , ce qui est impossible.

Sur une variété W , T' possède donc un nombre fini de points unis. Ou encore, il y a un nombre fini de variétés V' sur lesquelles T' se réduit à l'identité.

A chaque variété V' sur laquelle T' se réduit à l'iden-

tité, correspond sur Φ un système continu ∞^t analogues à $\{\Gamma_1\}$.

5. Reprenons le système linéaire $|C|$, transformé en lui-même par T , considéré au début. Il contient un système linéaire appartenant à l'involution I_p et dépourvu de points-base ; à ce système correspond sur Φ le système $|\Gamma_1|$. On peut toujours supposer que $|\Gamma_1|$ est le système des sections hyperplanes de Φ , les points de diramation de cette surface étant alors des points isolés, singuliers pour la surface.

Soit $|C'|$ un second système linéaire de $\{C\}$ transformé en lui-même par T et comprenant donc des systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p . Considérons un de ces systèmes et soit $|\Gamma'_1|$ le système linéaire complet qui lui correspond sur Φ . Supposons que $|\Gamma'_1|$ soit dépourvu de points-base.

Considérons une courbe de $\{C\}$ non transformée en elle-même par T . Il lui correspond sur Φ une courbe Γ et à cette courbe Γ correspond sur F la courbe C et ses transformées par T, T^2, \dots, T^{p-1} . Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $\{C\}$ et vient coïncider avec une courbe de $|C|$ transformée d'une courbe Γ_1 , la courbe Γ se réduit à la courbe $p\Gamma_1$.

D'une manière analogue, la courbe Γ peut se réduire à la courbe $p\Gamma'$.

Les courbes $p\Gamma_1$ et $p\Gamma'_1$ appartiennent donc à un même système continu $\{\Gamma\}$. On en conclut que les systèmes continus $\{\Gamma_1\}, \{\Gamma'\}$ sont les diviseurs d'un même système continu $\{\Gamma\}$, car on peut prendre le système $|C'|$ en dehors du système continu $\{C_0\}$ qui contient $|C|$.

Soient k le nombre des variétés V' de $\{V'\}$ sur lesquelles T' se réduit à l'identité et τ le nombre de points communs à une variété V' et à une variété W .

S'il existe, parmi les systèmes linéaires tracés sur Φ

et ayant pour homologues sur F des systèmes appartenant à des systèmes linéaires de $\{C\}$, des systèmes dépourvus de points-base et dont les transformés sur F ne correspondent pas à des points d'une même variété V' , le diviseur de Severi σ de la surface Φ est supérieur à l'unité.

En général, un système linéaire de $\{C\}$ transformé en lui-même par T contiendra un système linéaire partiel appartenant à I_p . On aura alors $\sigma = k$ ou, tout au moins, σ sera multiple de k .

Si par exemple, on a $p = 2$, le nombre des points unis de T' sur une variété W sera égal à $2^{2(q-q')}$. On aura, en général,

$$\sigma = \frac{2^{2(q-q')}}{\tau} .$$

Liège, le 27 mars 1946.