TIRADA APARTE DE *MATHEMATICÆ NOTÆ* - AÑO VI - FASC. 4

SUR UNE INVOLUTION RATIONNELLE APPARTENANT À UNE RÉGLÉE ELLIPTIQUE

par

LUCIEN GODEAUX

Dans cette note, nous nous proposons d'appliquer la théorie des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (¹) à l'étude d'une involution rationnelle appartenant à une surface réglée elliptique. Bien que le problème que nous nous sommes posé puisse à première vue paraître élémentaire, il nous fournit l'occasion de certains développements qui nous semblent présenter un certain intérêt.

Nous aurons à utiliser certains théorèmes de Géométrie sur une surface algébrique; nous renvoyons, pour ces questions, aux belles *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche* de M. Enriques (²).

1. Soit L la cubique plane d'équation

$$a_1 x_1^2 x_2 + a_2 x_2^2 x_3 + a_3 x_3^2 x_1 = 0.$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie h de période trois

$$\begin{pmatrix} x_1 & \varepsilon x_2 & \varepsilon^2 x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité. Cette homogra-

(¹) On peut consulter, sur ces questions, notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scientifiques et industrielles, Nº 270. Paris, Hermann, 1935).

(²) Raccolte dal Dott. L. Campedelli (Padova, Cedam, 1932).

phie h a comme points unis les sommets O_1, O_2, O_3 du triangle de référence; elle détermine, sur la courbe L, une involution d'ordre trois, rationnelle, ayant trois points unis O_1, O_2, O_3.

Considérons la surface F qui représente les couples de points non ordonnés, de la courbe L.

À un point P de F correspondent deux points P_1, P_2 de la courbe L. Soient P'_1, P'_2 les points que h fait correspondre à P_1, P_2 et P''_1, P''_2 les points que cette homographie fait correspondre à P'_1, P'_2. Au couple $P'_1 P'_2$ correspond un point P' et au couple $P''_1 P''_2$ un point P'' de F. Appelons T la transformation birationnelle de F en soi qui fait correspondre P' a P. T fait également correspondre P'' à P' et P à P''. La transformation T est birationnelle de période trois; elle engendre sur F une involution I_3 d'ordre trois, dont P, P', P'' forment un groupe.

Nous désignerons par F' une surface image de l'involution I_3. On sait que F appartient à la classe des réglées elliptiques; nous démontrerons que la surface F' est rationnelle.

2. Aux couples de points de L comprenant un point fixe R_0 correspondent sur F les points d'une courbe elliptique K. Lorsque le point R_0 décrit la courbe L, la courbe K varie dans un système continu, simplement infini, $\{K\}$, d'indice deux et de degré un.

L'enveloppe du système $\{K\}$ est une courbe K_0, dont les points représent les couples de points de L formés de deux points confondus.

Aux couples de points de L alignés sur le point R_0 couples qui appartiennent donc à une série linéaire g_2^1, correspondent sur F les points d'une courbe rationnelle H, rencontrant en un point les courbes K.

Lorsque le point R_0 décrit la courbe L, la courbe H décrit un faisceau elliptique $\{H\}$.

Soit maintenant R un point du plan de L, n'appartenant pas à cette courbe. Aux couples de points de L alignés sur R correspondent sur F les points d'une courbe C. Chaque droite passant par R coupe L en trois points se répartissant en trois couples auxquels correspondent sur C trois points. Ces points engendrent sur C une série linéaire g_3^1. Les points doubles de cette série correspondent aux tangentes à L menées par R; la série possède donc six points doubles et si x est le genre de C, on a

$$2(3+x-1)=6,$$

d'où $x=1$. La courbe C est donc elliptique.

Les courbes C forment un réseau $|C|$, de degré trois et ce réseau est complet. Observons en effet que l'on a

$$C \equiv K+H,$$

la dégénérescence de la courbe C ayant lieu lorsque le point R appartient à la courbe L. Sur une courbe K, les courbes C découpent une série linéaire $g_2{}^1$ et elles rencontrent une courbe H en un seul point. Il ne peut exister qu'une courbe H déterminée, par conséquent $|C|$ ne peut avoir une dimension supérieure à deux.

3. Désignons par K_1, K_2, K_3 les courbes K correspondant aux points O_1, O_2, O_3 de L, unis pour l'homographie h. Soient H_1, H_2, H_3 les courbes H associées à K_1, K_2, K_3. Chacune de ces six courbes est transformée en elle-même par T.

L'involution I_3 possède six points unis: les point A_{23}, A_{31}, A_{12}, représentant respectivement les couples O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2, et les points A_{11}, A_{22}, A_{33}, représentant respectivement les points O_1, O_2, O_3 comptés chacun deux fois.

Les points A_{11}, A_{22}, A_{33} sont les points de contact des courbes K_1, K_2, K_3 avec l'enveloppe K_0 de $\{K\}$. Les points A_{23}, A_{31}, A_{12} sont les points d'intersections des couples de courbes K_2 et K_3, K_3 et K_1, K_1 et K_2.

Considérons la courbe H_1, représentant la série $g_2{}^1$ découpée sur L par les droites passant par O_1. La droite $O_1\,O_3$ est tangente à L au point O_1, donc le point A_{31} appartient à la courbe H_1. D'autre part, la droite $O_1\,O_2$ touche L au point O_2, donc la courbe H_1 rencontre la courbe K_2 au point A_{22}.

De même, la courbe H_2 passe par les points A_{12} et A_{33}; la courbe H_3 passe par les points A_{23} et A_{11}.

Dans le domaine du premier ordre du point A_{23}, T opère comme une homographie ou, si l'on préfère, T détermine une homographie dans le faisceau des tangentes à F au point A_{23}. La courbe H_3 ne peut toucher en ce point l'une des courbes K_2, K_3, car les courbes H rencontrent les courbes K en un seul point. Par conséquent les tangentes aux courbes K_2, K_3, H_3 en

A_{23} sont unies pour l'homographie en question et cette homographie est l'identité.

Il en résulte que les points infiniment voisins de A_{23} sur F sont unis pour T, c'est-à-dire que le point A_{23} est, suivant notre terminologie, un point uni parfait.

Il en est de même des points A_{31} et A_{12}.

4. Considérons maintenant le point A_{11}. Dans le faisceau des tangentes à F en ce point, T détermine une homographie de période trois, dont nous connaissons deux tangentes unies: la tangente commune aux courbes K_1, K_0 et la tangente à la courbe H_3. Ces deux droites sont distinctes, car la courbe H_3, ne rencontrant les courbes K qu'en un point, ne peut être tangente à K_1.

Envisageons les courbes C relatives aux points R de la droite $O_1 O_3$. La droite $O_1 O_3$ touche L en O_1, donc la courbe C relative à un point R distinct de O_1, O_3, passe par le point A_{11} — sans y toucher ni K_1, ni H_3 — et par le point A_{23}, où elle touche K_3. Lorsque le point R varie sur la droite $O_1 O_3$, la courbe C décrit un faisceau déterminé dans le réseau $|C|$ par les courbes $K_1 + H_1$, $K_3 + H_3$. Ce faisceau est transformé en lui-même par T. Si le point A_{11} était uni parfait pour I_3, une de ces courbes C et ses transformées par T se toucheraient en A_{11}. Mais cela est impossible, car $|C|$ est de degré trois et toutes les courbes C du faisceau envisagé touchent K_3 en A_{23}. Il en résulte que le point A_{11} est un point uni non parfait.

Il en est de même des points A_{22}, A_{33}.

Ainsi: *L'involution I_3 possède trois points unis parfaits A_{23}, A_{31}, A_{12} et trois points unis non parfaits A_{11}, A_{22}, A_{33}.*

5. Pour construire un modèle projectif de l'image F' de l'involution I_3, partons du réseau $|C|$. Ce réseau est transformé en lui-même par T et contient trois courbes transformées en elles-mêmes par T; ce sont les courbes $K_1 + H_1$, $K_2 + H_2$, $K_3 + H_3$.

A une courbe C correspond sur F' une courbe C', elliptique, possédant trois points doubles, homologues des couples de points de la courbe C qui appartiennent à des groupes de l'involution I_3. Lorsque la courbe C varie, la courbe C' et ses trois points doubles varient; elle engendre précisément un système continu rationnel $\{C'\}$ de genre virtuel quatre et dont la dimension est deux. Ce système appartient totalement à un système linéaire $|C'|$ de genre quatre et dont la dimension est au moins égale à trois. Ce système $|C'|$ a pour homologue sur F un système linéaire appartenant au système $|3C|$ et par conséquent il a le degré neuf.

Rapportons projectivement les courbes C' aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, r étant la dimension du système $|C'|$. A la surface F' correspond birationnellement une surface d'ordre neuf, à sections hyperplanes de genre quatre, que nous continuerons à désigner par F'.

Aux points unis de I_3 correspondent sur F' des points de diramation isolés qui sont, comme nous l'avons établi ailleurs:

1) Trois points triples A'_{23}, A'_{31}, A'_{12}, homologues des points unis A_{23}, A_{31}, A_{12}. En chacun de ces points, le cône tangent à la surface est rationnel.

2) Trois points doubles biplanaires ordinaires A'_{11}, A'_{22}, A'_{33}, homologues des points unis A_{11}, A_{22}, A_{33}.

Les courbes C rencontrent les courbes K en des groupes de deux points et par suite les courbes $3C$ rencontrent K_1 en des groupes de six points; à la courbe K_1 correspond donc sur F' une conique K'_1 passant par les points A'_{11}, A'_{31}, A'_{12}.

La courbe H_1 est rencontrée en trois points par les courbes $3C$, donc à H_1 correspond sur F' une droite H'_1 joignant les points A'_{22} et A'_{31}.

De même, à la courbe K_2 correspond sur F' une conique K'_2 passant par les points A'_{22}, A'_{23}. A'_{12} et à la courbe K_3 une conique K'_3 passant par les points A'_{33}, A'_{31}, A'_{23}.

A la courbe H_2 correspond une droite H'_2 joignant les points A'_{33} et A'_{12}; à la courbe H_3 correspond une droite H'_3 joignant les points A'_{11} et A'_{23}.

Nous avons vu qu'à une courbe C correspond une section hyperplane C' de F' possédant trois points doubles, donc faite par un hyperplan tangent en trois points à la surface. Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $|C|$ et tend vers la courbe $K_1 + H_1$, la courbe C' tend vers la courbe $K'_1 + H'_1$ comptée trois fois. Par conséquent, il existe un hyperplan osculant F' le long de la courbe $K'_1 + H'_1$.

De même, il existe des hyperplans osculant F' le long de chacune des courbes $K'_2 + H'_2$, $K'_3 + H'_3$.

6. On sait que la surface F appartient à la classe des reglées elliptiques (*C. Segre*). Nous allons démontrer que la surface F'

est rationnelle. Dans ce but, il nous suffira de démontrer que la surface F' contient un faisceau linéaire de courbes rationnelles.

Rappelons que les courbes H forment sur F un faisceau elliptique. A une courbe H correspond sur F' une courbe rationnelle H' et inversement, à cette courbe H' correspondent sur F la courbe H et ses transformées par T et T^2. Lorsque la courbe H varie, la courbe H' décrit un faisceau. Ce faisceau est linéaire, car les les groupes de trois courbes H qui correspondent aux courbes H' forment, dans le faisceau elliptique $\{H\}$, une involution d'ordre trois ayant trois éléments unis: les courbes H_1, H_2, H_3; et par conséquent cette involution est rationnelle.

Ainsi donc, F' possède un faisceau linéaire $|H'|$ de courbes rationnelles et par conséquent est rationnelle (*Noether*).

Les courbes H' sont des cubiques gauches, car les courbes $3C$ rencontrent une courbe H en trois points. Dans le faisceau $|H'|$ se trouvent trois courbes H'_1, H'_2, H'_3 formées de droites comptées chacune trois fois.

On peut également démontrer la rationnalité de F' par une autre voie.

Tout d'abord, si F' possédait une courbe bicanonique, la transformée de celle-ci sur F serait une courbe bicanonique de cette surface, ce qui est impossible. Donc la surface F' a le bigenre $P_2=0$.

D'autre part, entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de F', nous avons démontré que l'on a la relation

$$12\,(p_a+1)=36\,(p'_a+1)-4\alpha-8\beta,$$

α étant le nombre de points unis parfaits, β le nombre de points unis non parfaits. Actuellement, on a $p_a=-1$, $\alpha=\beta=3$, donc $p'_a=0$.

La surface F' ayant les caractères $p_a=P_2=0$, est rationnelle (*Castelnuovo*).

7. Observons qu'à la courbe

$$K_1+K_2+K_3+H_1+H_2+H_3,$$

qui appartient au système $|3C|$, correspond sur F' une section hyperplane, formée des courbes K'_1, K'_2, K'_3, H'_1, H'_2, H'_3. L'hyperplan contenant ces courbes passe par les six points de dirama-tion A'_{23}, A'_{31}, A'_{12}, A'_{11}, A'_{22}, A'_{33}. Par conséquent, la dimension de cet hyperplan est au moin égale à cinq et l'espace contenant F' a la dimensions $r \geqq 6$.

D'autre part, le système $|C'|$ des sections hyperplanes de F' a le degré 9, le genre 4 et par conséquent la dimensions $r \leqq 6$. On a donc $r = 6$.

La surface F', d'ordre 9, à sections hyperplanes de genre 4, est normale dans un espace à six dimensions. Elle possède trois points triples, à cône tangent rationnel, et trois points doubles biplanaires ordinaires.

8. Chacun des points triples A'_{23}, A'_{31}, A'_{12} est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré -3. Nous désignerons respectivement par γ_1, γ_2, γ_3 ces courbes.

Chacun des points doubles biplanaires ordinaires A'_{11}, A'_{22}, A'_{33} est équivalent à deux courbes rationnelles de degré -2, se coupant en un point. Nous désignerons par γ_{i1}, γ_{i2} les courbes équivalentes au point A_{ii}'. D'une manière précise, nous avons établi que ces courbes correspondent aux points unis pour I_3, infiniment voisins du point uni correspondant. Nous supposerons que la courbe γ_{11} correspond au point uni de I_3 infiniment voisin de A_{11} sur les courbes K_0, K_1 et que la courbe γ_{12} correspond au point uni de I_3 infiniment voisin de A_{11} sur la courbe H_3. Nous utiliserons des notations analogues, obtenues par permutation tournante, pour les autres points.

Cela étant, nous avons les relations fonctionnelles

$$C' \equiv 3\,(K'_1 + H'_1) + 2\gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{21} + 2\gamma_{22} + \gamma_3 + 2\gamma_2,$$

$$C' \equiv 3\,(K'_2 + H'_2) + 2\gamma_{21} + \gamma_{22} + \gamma_{31} + 2\gamma_{32} + \gamma_1 + 2\gamma_3,$$

$$C' \equiv 3\,(K'_3 + H'_3) + 2\gamma_{31} + \gamma_{32} + \gamma_{11} + 2\gamma_{12} + \gamma_2 + 2\gamma_1.$$

Pour établir la première de ces relations, par exemple, remarquons que sur F, la courbe $K_1 + H_1$ passe une fois par le point A_{12}, deux fois par le point A_{31}, une fois par le point A_{11} et une fois par le point A_{32} sans toucher en ce point la courbe K_2. Par conséquent sur F', la courbe $K'_1 + H'_1$ rencontre en un point la courbe γ_3, en deux points la courbe γ_2, en un point la courbe

γ_{11} sans rencontrer la courbe γ_{12}, en un point la courbe γ_{22} sans rencontrer la courbe γ_{21}.

Puisqu'il y a un hyperplan osculant F' le long de la courbe $K'_1+H'_1$, nous avons

$$C'\equiv 3(K'_1+H'_1)+\lambda_{11}\gamma_{11}+\lambda_{12}\gamma_{12}+\lambda_{21}\gamma_{21}+\lambda_{22}\gamma_{22}+\lambda_2\gamma_2+\lambda_3\gamma_3.$$

Exprimons que la courbe γ_{11} coupe $K'_1+H'_1$ en un point, mais que γ_{12} ne rencontre pas cette courbe. Nous avons

$$3-2\lambda_{11}+\lambda_{12}=0,\quad \lambda_{11}-2\lambda_{12}=0,$$

d'où $\lambda_{11}=2$, $\lambda_{12}=1$.

On trouve de même $\lambda_{21}=1, \lambda_{22}=2$.

Exprimons que γ_2 coupe $K'_1+H'_1$ en deux points et γ_3 en un point ; on a

$$6-3\lambda_2=0,\quad 3-3\lambda_3=0$$

d'où $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$.

Les autres relations s'obtiennent de la même manière, ou par parmutation tournante.

9. Désignons pour simplifier par $|D|$ le système $|3C|$. Aux courbes C' correspondent, comme on l'a vu, des courbes du système $|D|$, formant un système de dimension six, que nous désignerons par $|D_1|$.

Le réseau $|C|$ est un système régulier, il en est donc de même du système $|D|=|3C|$ et ce système a la dimension 17. Il a d'autre part le degré 27 et le genre 10.

Observons que T opère, sur le réseau $|C|$, dont les courbes sont considérées comme éléments, comme une homographie de période trois, car à une courbe C, T fait correspondre une courbe C et à un faisceau de courbes C, un faisceau de courbes C. Cette homographie possède trois éléments unis, les courbes K_1+H_1, K_2+H_2, K_3+H_3, n'appartenant pas à un même faisceau, donc cette homographie est non homologique.

On peut donc attacher à chacune des courbes unies K_1+H_1, K_2+H_2, K_3+H_3, respectivement les nombres 1, ε, ε^2, où ε est une racine cubique primitive de l'unité.

Cela étant, les courbes

$$3(K_1+H_1)\quad 3(K_2+H_2),\quad 3(K_3+H_3),$$
$$K_1+K_2+K_3+H_1+H_2+H_3$$

appartiennent, comme nous l'avons vu, au système $|D_1|$, auquel est attaché le nombre 1.

Considérons les courbes

$$2(K_1+H_1)+K_2+H_2,\quad 2(K_2+H_2)+K_3+H_3,$$
$$2(K_3+H_3)+K_1+H_1,$$

auxquelles est attaché le nombre ε. Ces courbes appartiennent au système $|D|$; elles déterminent dans ce système un réseau que nous désignerons par $|D_2|$. On voit aisément que les courbes D_2 passent simplement par les points A_{23}, A_{31}, A_{21}, A_{11}, A_{22}, A_{33}. En A_{11}, elles touchant H_3, en A_{22}, elles touchent H_1 et en A_{33}, elles touchent H_2.

Les courbes D_2 sont transformées en elles-mêmes par T et le réseau $|D_2|$ appartient donc à l'involution I_3. Il lui correspond sur F' un réseau $|D'_2|$ de courbes d'ordre neuf.

A une courbe de $|D|$, non transformée en elle-même par T, correspond sur F' une courbe D' variable dans un système linéaire. Lorsque D varie d'une manière continue dans $|D|$ et tend vers une courbe D_1, la courbe D' tend vers une courbe de $|3C'|$. Lorsque D tend vers une courbe D_2. D' tend vers une courbe $3D'_2$. On a donc

$$3C'\equiv 3D'_2+\lambda_1\gamma_1+\lambda_2\gamma_2+\lambda_3\gamma_3+\lambda_{11}\gamma_{11}+\lambda_{12}\gamma_{12}+$$
$$+\lambda_{21}\gamma_{21}+\lambda_{22}\gamma_{22}+\lambda_{31}\gamma_{31}+\lambda_{32}\gamma_{32}.$$

En tenant compte du fait que la courbe D'_2 rencontre en un point chacune des courbes γ_1, γ_2. γ_3, γ_{12}, γ_{22}, γ_{32}, on trouve facilement la relation fonctionnelle

$$3C'\equiv 3D'_2+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_{11}+\gamma_{21}+\gamma_{31}+2(\gamma_{12}+\gamma_{22}+\gamma_{32}).$$

Projectivement, cela signifie que le long de chacune des courbes D'_2, il y a une hypersurface cubique osculant la surface F'.

Le réseau $|D'_2|$ est de degré six et, par la formule de Zeuthen, de genre deux.

10. Envisageons maintenant, dans $|D|$, le réseau, appartenant à l'involution I_3, déterminé par les courbes

$$2(K_1 + H_1) + K_3 + H_3, \quad 2(K_2 + H_2) + K_1 + H_1,$$
$$2(K_3 + H_3) + K_2 + H_2,$$

auxquelles est attaché le nombre ε^2.

Ces courbes D_3 ont des points doubles en A_{23}, A_{31}, A_{12} et passent simplement par les points A_{11}, A_{22}, A_{33} en y touchant respectivement K_1, K_2, K_3.

Si nous désignons par D'_3 les courbes qui, sur F', correspondent aux courbes D_3, on obtient, en raisonnant comme tantôt, la relation fonctionnelle

$$3C' \equiv 3D'_3 + 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + 2(\gamma_{11} + \gamma_{21} + \gamma_{31}) + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{32}.$$

Le réseau $|D'_3|$ a le degré trois et, en utilisant la formule de Zeuthen, on voit que ses courbes sont rationnelles. Les courbes D_3 ayant trois points doubles, sont du reste de genre sept.

Désignons par r_2, r_3 les dimensions des systèmes complets $|D'_2|$, $|D'_3|$ sur la surface F'. D'après le théorème de Riemann-Roch sur les surfaces rationnelles, on a

$$r_2 \geqq 5, \qquad r_3 \geqq 4.$$

D'autre part, dans $|D|$, la transformation T agit comme une homographie ayant trois axes ponctuels $|D_1|$, $|D_2|$, $|D_3|$ et on a donc

$$6 + r_2 + r_3 + 3 = 17 + 1,$$

c'est-à-dire

$$r_2 + r_3 = 9.$$

On a donc $r_2 = 5$, $r_3 = 4$.

Sur la surface F' existent deux systèmes linéaires de courbes d'ordre neuf: le premier a la dimension cinq, le degré six et le genre deux; le second la dimension quatre, le degré trois et le genre zéro. Le long de chacune des courbes de ces systèmes, il y a une hypersurface cubique osculant la surface F'.

11. La surface F', d'ordre 9, possède trois points triples A'_{23}, A'_{31}, A'_{12} et les hyperplans passant par ces trois points doivent couper la surface suivant une courbe. Nous allons montrer que F' contient un faisceau de cubiques gauches passant par A'_{23}, A'_{31}, A'_{12} et que tout hyperplan passant par ces trois points coupe F' suivant trois de ces cubiques gauches.

Retournons à la courbe L et considérons la série $g_3{}^2$ complète découpée par les courbes

$$\lambda_0 x_1 x_2 x_3 + \lambda_1 x_1{}^2 x_2 + \lambda_2 x_2{}^2 x_3 + \lambda_3 x_3{}^2 x_1 = 0. \qquad (1)$$

Pour $\lambda_0 = 0$, on obtient la série $g_3{}^1$ engendrée par l'homographie h. Aux couples de points appartenant aux groupes de cette série correspondent sur F les points d'une courbe G_0. En reprenant le raisonnement fait à propos des courbes C, on voit que la courbe G_0 est elliptique.

Donnons maintenant à λ_1, λ_2, λ_3 des valeurs fixes, distinctes de a_1, a_2, a_3 et faisons varier λ_0. Nous obtenons une série $g_3{}^1$ transformée en elle-même par h (mais dont les groupes ne sont pas en général transformés en eux-mêmes par h). A cette série $g_3{}^1$ correspond sur F une courbe que nous désignerons par G. En reprenant le raisonnement fait pour les courbes C, on voit que la courbe G est elliptique. Observons de plus que la série $g_3{}^1$ considérée contient un groupe formé des points O_1, O_2, O_3 et que par conséquent la courbe G passe par les points A_{23}, A_{31}, A_{12}.

Deux séries linéaires $g_3{}^1$ données sur L ont en commun trois couples de points, donc les courbes G rencontrent les courbes C en trois points. Par conséquent, elles rencontrent les courbes D et en particulier les courbes D_1 en neuf points.

Les courbes analogues à G forment un faisceau $|G|$. Chaque courbe de ce faisceau est transformée en elle-même par T et rencontre les courbes D_1 en neuf points formant trois groupes de I_3. Par conséquent aux courbes G correspondent sur F' des cubiques gauches G' formant un faisceau $|G'|$ et passant par les points A'_{23}, A'_{31}, A'_{12}.

Il existe un hyperplan passant par les points A'_{23}, A'_{31}, A'_{12} et par trois points pris chacun sur trois cubiques gauches G' distinctes M. Cet hyperplan contient ces trois cubiques gauches et par conséquent *les hyperplans passant par les points triples*

A'_{23}, A'_{31}, A'_{12} de F' coupent cette surface suivant des courbes formées de trois cubiques gauches du faisceau G'.

A la courbe G_0 correspond sur F' une cubique gauche G'_0 passant par les points A'_{11}, A'_{22}, A'_{33}.

Aux différentes séries g_3^1 tirées de la série g_3^2 découpée sur L par les courbes (1), correspondent sur F des courbes elliptiques formant un réseau comprenant les courbes G_0 et G. D'après ce qui précède, le triple de ce réseau appartient au système $|D|$. La transformation T agit d'ailleurs sur les courbes de ce réseau comme une homologie.

LIÈGE (BELGICA), UNIVERSITÉ
37, QUAI ORBAN