Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences).
Séance du 2 mai 1944, n^{os} 4-6.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur la construction des surfaces doubles n'ayant qu'un nombre fini de points de diramation,

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie.

Dans un mémoire antérieur [1], nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface représente une involution du second ordre, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. Nous nous proposons de montrer comment on peut construire de telles surfaces.

1. Dans notre mémoire cité, nous avons établi le théorème suivant :

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface algébrique représente une involution du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique, sont que :

a) *La surface possède des points doubles coniques en nombre multiple de quatre ;*

b) *Parmi les hypersurfaces découpant sur la surface le système double de celui des sections hyperplanes, il y en ait qui passent par les points doubles et qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

Soient F la surface considérée, ν le nombre (multiple de 4) de points doubles coniques, C les sections hyperplanes, D une courbe le long de laquelle une hypersurface du système découpant sur F le système $|2C|$,

[1] *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, pp. 289-312).

passant par les points doubles, touche F. Chacun des points doubles coniques est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2; nous désignerons par γ_1, γ_2, ..., γ_ν les courbes équivalentes aux points doubles coniques de F. La seconde condition se traduit par la relation fonctionnelle

$$2C \equiv 2D + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu. \tag{1}$$

Supposons que, sans que la seconde condition de l'énoncé soit remplie, il existe sur F une courbe D′ le long de laquelle une hypersurface d'ordre pair $2n$, passant par les points doubles, touche la surface F. Cela signifie que nous avons

$$2nC \equiv 2D' + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu. \tag{2}$$

Remplaçons alors la surface F par la surface F′ que l'on obtient en rapportant projectivement les courbes du système $|nC|$ aux hyperplans d'un espace à un nombre convenable de dimensions. La surface F′ possèdera à son tour ν points doubles coniques équivalents aux courbes γ_1, γ_2, ..., γ_ν. Si nous désignons par C′ les sections hyperplanes de F′, la relation (2) donne

$$2C' \equiv 2D' + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\nu. \tag{3}$$

La comparaison entre les relations (1) et (3) montre que la surface F′, et par conséquent la surface F, représente une involution du second ordre appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis.

La seconde condition de l'énoncé ci-dessus peut donc être remplacée par la suivante :

b) *Il existe une hypersurface d'ordre pair passant par les points doubles et touchant la surface en chaque point d'intersection.*

2. Considérons, dans l'espace ordinaire, deux surfaces

F, F′ d'ordres m, m', l'un au moins de ces nombres étant pair, et supposons que ces surfaces se touchent le long d'une courbe D d'ordre $\frac{1}{2}mm'$.

Supposons en outre que la surface F possède ν points doubles coniques sur la courbe D, sans autre singularité, et que ces points soient simples pour F′.

La première polaire d'un point arbitraire P par rapport à F est une surface d'ordre $m - 1$ passant par les ν points doubles de F et rencontrant encore la courbe D, en dehors de ces points, en $\frac{1}{2}mm'(m - 1) - \nu$ points. En chacun de ceux-ci, le plan tangent à F est également tangent à F′ et passe par P. Les plans tangents à F et F′ aux points D engendrent donc une développable de classe

$$\delta = \frac{1}{2}mm'(m - 1) - \nu.$$

La première polaire de P par rapport à F′ est une surface d'ordre $m' - 1$ coupant D en $mm'(m' - 1)$ points parmi lesquels se trouvent les δ points de contact des plans passant par P et appartenant à la développable dont il vient d'être question. Soit M un des

$$\begin{aligned} \nu' &= \frac{1}{2}mm'(m' - 1) - \frac{1}{2}mm'(m - 1) + \nu \\ &= \frac{1}{2}mm'(m' - m) + \nu \end{aligned}$$

points restants. En un de ces points, le plan tangent à F′ ne peut être déterminé, car autrement, il serait aussi tangent à F, passerait par P et la première polaire de P par rapport à F contiendrait la courbe D. Mais alors, cette propriété étant vérifiée pour tous les points P de l'espace, la courbe D serait double pour la surface F, contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, chacun des points considérés est double (et en général double conique) pour la surface F′.

Ainsi, si F possède ν points doubles coniques sur la courbe D, la surface F′ possède ν' points doubles coniques sur la même courbe.

Réciproquement, le même raisonnement prouve que si F′ a ν' points doubles coniques sur la courbe D, la surface F a ν points doubles coniques sur la même courbe.

Le raisonnement précédent suppose évidemment que l'on a

$$2\nu \geqslant mm'(m - m').$$

3. Supposons maintenant que les surfaces F, F′ soient toutes deux d'ordres pairs $m = 2n$, $m' = 2n'$ et que l'on ait $n > n'$. La courbe D a actuellement l'ordre $2nn'$.

Il est aisé de construire une surface F touchant la surface F′, supposée donnée et dépourvue de singularités, le long de la courbe D. Soient en effet

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \qquad \phi'(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$
$$\phi''(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

les équations d'une surface d'ordre n, de la surface F′ et d'une surface F″ d'ordre $2(n - n')$. L'équation

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = f^2 - \phi'\phi'' = 0$$

représente une surface F répondant à la question ; elle touche la surface F′ le long de la courbe D d'équations

$$f = 0, \quad \phi' = 0$$

et possède

$$\nu = 4nn'(n - n')$$

points doubles coniques sur la courbe D. Ici, ces points doubles s'aperçoivent immédiatement et sont donnés par

$$f = 0, \quad \phi' = 0, \quad \phi'' = 0.$$

Nous pouvons appliquer à la surface F le théorème rappelé au début :

Il existe une surface algébrique Φ contenant une involution I_2 *d'ordre deux, possédant* $4nn'(n - n')$ *points unis, dont* F *est l'image.*

Si nous désignons par C les sections planes de la surface F et par $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\nu$ les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes à ses ν points doubles, nous avons, sur cette surface

$$2n'C \equiv 2D + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu.$$

Sur la surface F, les courbes D appartiennent à un système linéaire $|D|$, de degré $2nn'(2n' - n)$ et de genre $nn'(n + 2n' - 4) + 1$. Le long de chaque courbe de ce système, il y a une surface d'ordre $2n'$ inscrite dans la surface F.

4. Désignons par Γ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes C. Le système $|\Gamma|$ a le degré $4n$ et le genre $2n(2n - 3) + 1$.

Le système $|n'\Gamma|$ contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_2 : l'un est le transformé de $|n'C|$; l'autre est le transformé du système $|D|$, Le système $|n'\Gamma|$ a le degré $4nn'^2$ et le genre $2nn'(2n + n' - 4) + 1$.

Plaçons-nous dans le cas général où la surface F ne possède pas d'autres singularités que les ν points doubles situés sur la courbe D. Le système canonique de cette surface est alors découpé par les surfaces d'ordre $2n - 4$ et ses genres arithmétique et linéaire sont respectivement égaux à

$$p_a = \frac{1}{3}(n - 1)(2n - 1)(2n - 3), \qquad p^{(1)} = 8n(n - 2)^2.$$

D'après les formules que nous avons établies dans notre mémoire cité plus haut, les genres arithmétique et linéaire de Φ sont égaux à

$$p_a = \frac{2}{3}(n-1)(2n-1)(2n-3) - nn'(n-n') + 1,$$
$$p^{(1)} = 16n(n-2)^2 - 1.$$

5. La surface F″, d'ordre $2n'' = 2(n - n')$, touche la surface F le long d'une courbe D_0 d'ordre $2nn''$. Cette courbe D_0 satisfait à la relation fonctionnelle

$$2n''C \equiv 2D_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu.$$

La courbe D_0 appartient à un système linéaire $|D_0|$ de degré $2nn''(2n'' - n)$ et de genre $nn''(n + 2n'' - 4) + 1$. Le long de chaque courbe de ce système, il existe une surface d'ordre $2n''$ inscrite dans la surface F.

Les surfaces F′ et F″ jouent ici des rôles symétriques. Supposons, pour fixer les idées, $n' \geqslant n''$, c'est-à-dire $2n' \geqslant n$.

Aux courbes D_0 correspondent sur Φ des courbes du système $|n''\Gamma|$ passant par les points unis de l'involution et aux courbes D, des courbes du système $|n'\Gamma|$ passant également par les points unis de l'involution I_2. Ces courbes diffèrent par des courbes du système $|n\Gamma|$ qui appartiennent à l'involution. Il en résulte que, sur la surface F, on a

$$D \equiv D_0 + nC.$$

Observons que si $n' > n''$, c'est-à-dire si $n > 2n''$, la courbe D_0 ayant un degré négatif, est isolée. Si $n' = n''$, c'est-à-dire si $n = 2n''$, la courbe D_0 est de degré nul et est isolée ou appartient à un faisceau.

Les courbes

$$D_1 \equiv D_0 + C, \quad D_2 \equiv D_0 + 2C, \quad \dots, \quad D_{n-1} \equiv D_0 + (n-1)C$$

donnent lieu à la relation fonctionnelle

$$2(n'' + i)C \equiv 2D_i + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_\nu,$$
$$(i = 1, 2, \dots, n-1),$$

mais ces courbes peuvent être réductibles.

Supposons que la courbe D_i soit irréductible. Il existe alors une surface F'_i irréductible touchant la surface F le long de la courbe D_i. Cette surface F′ possède

$$\nu'_i = 4ni(n + i - 2n')$$

points doubles sur la courbe D_i et ce nombre doit être positif. Une condition pour que la courbe D_i soit irréductible est donc

$$i \geqslant 2n' - n.$$

6. Il est toujours possible de trouver un entier p suffisamment grand, distinct de n' et n'', tel qu'il existe une courbe E irréductible satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$2pC \equiv 2E + \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_\nu.$$

Il existe alors une surface irréductible F_1, d'ordre $2p$, inscrite dans la surface F le long de la courbe E. Cette surface possède

$$\mu = 4np(p - n) - 4nn'(n - n')$$

points doubles coniques sur la courbe E.

Désignons par C_1 une section plane de F_1 et par $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_\mu$ les courbes rationnelles de degré -2 équivalentes aux μ points doubles de la surface F_1 Sur cette surface, on a

$$2nC_1 \equiv 2E + \gamma'_1 + \gamma'_2 + \ldots + \gamma'_\mu.$$

Il en résulte qu'il existe une surface Φ_1 contenant une involution d'ordre deux possédant μ points unis, dont F_1 est l'image.

Nous allons traiter un exemple. Nous prendrons une surface F du sixième ordre ($n = 3$) et une surface F′ du quatrième ordre ($n' = 2$) se touchant le long d'une courbe D d'ordre 12. La surface F′ est dépourvue de points doubles et la surface F possède 24 points doubles coniques sur la courbe D.

La surface F'' est une quadrique touchant F le long d'une courbe D_0 d'ordre six. Sur la surface F, la courbe D_0, de degré -6 et de genre 4, est isolée.

La courbe D est de degré 12 et de genre 19. La surface F a le genre arithmétique $p_a = 10$, donc, d'après le théorème de Riemann-Rich, la courbe D appartient à un système linéaire $|D|$ de dimension $r \geqslant 4$.

Observons qu'une courbe D ne peut appartenir à une quadrique, mais qu'elle appartient, par construction, à une surface cubique. Il en résulte que le groupe G découpé par une courbe D sur une section plane C, de genre dix, de F, est spécial. Les adjointes à la courbe C sont les cubiques de son plan ; par G, il ne peut passer qu'une de ces cubiques, puisque G se compose de 12 points. G a par conséquent l'indice de spécialité un et appartient donc à une série de dimension trois. Par quatre points d'une courbe C passent ∞^{r-4} courbes D comprenant la courbe C comme partie ; elles sont complétées par la courbe D_0, qui est isolée. On a donc $r = 4$ et le système $|D|$ est régulier.

La surface Φ est de genre arithmétique $p_a = 15$. Le système canonique de F est découpé par les quadriques, c'est donc le système $|2C|$. Son homologue sur Φ est le système $|2L|$, système canonique de cette surface. Ce système $|2L|$ comprend les transformées des courbes D et a par conséquent la dimension 14. Φ a donc le genre géométrique $p_g = 15$ et est régulière.

8. Nous allons maintenant montrer que si une surface F du sixième ordre possède 24 points doubles coniques et que s'il existe une surface du quatrième ordre passant par les points doubles et touchant F en tout point d'intersection, il existe une quadrique passant par les points doubles et touchant F en chaque point d'intersection. Il en résulte que F est du même type que la surface considérée ci-dessus.

Par hypothèse, il existe donc une courbe D satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$4C \equiv 2D + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{24}.$$

La courbe D, d'ordre 12, a le degré 12 et le genre 19 en vertu de la relation précédente. La dimension du système $|D|$ est donc $r \geqslant 4$. Les surfaces cubiques de l'espace découpent sur une courbe D une série linéaire d'ordre 36 qui est donc, soit la série canonique, soit une série paracanonique. Dans ce dernier cas, elle a la dimension 17 et il existe deux surfaces cubiques distinctes passant par la courbe D, d'ordre 12, ce qui est absurde. Il en résulte que la série envisagée est la série canonique, de dimension 18. Par suite, il existe une surface cubique et une seule passant par la courbe. Dans ces conditions, les courbes D découpent sur une section plane C de F une série spéciale, dont l'indice de spécialité ne peut être que un. Par conséquent, il existe ∞^{r-4} courbes D comprenant une courbe C comme partie. Soit D_0 une courbe qui, avec la section plane C, forme une courbe D. Il existe une surface du quatrième ordre circonscrite à la surface F le long de la courbe $D_0 + C$; cette surface dégénère nécessairement en le plan de C compté deux fois et une quadrique F'' touchant F le long de D_0. Cette quadrique F'' est nécessairement unique et on a donc $r = 4$.

Cela étant, désignons par Ψ la surface cubique, unique, passant par une courbe D. La surface F', inscrite dans F le long de cette courbe et la quadrique F'', inscrite dans F, forment une surface du sixième ordre. Cette surface et la surface F déterminent un faisceau de surfaces du sixième ordre ayant pour base la courbe $D + D_0$, le long de laquelle les surfaces du faisceau se touchent. La courbe D_0 appartient d'ailleurs à la surface F'', puisque celle-ci la rencontre en 24 points. Il existe donc une surface du faisceau qui comprend la surface Ψ comme partie ; elle est complétée par une surface cubique passant par la courbe $D + D_0$ et qui coïncide donc avec Ψ. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si une surface du sixième ordre possède 24 points doubles coniques et s'il existe une surface du quatrième ordre passant par ces points doubles et touchant la surface donnée en tout point d'intersection, cette surface appartient nécessairement à un faisceau déterminé par une surface cubique comptée deux fois et par une surface formée de la surface du quatrième ordre et d'une quadrique.

9. Considérons, sur la surface F, les courbes D_1 satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$6C \equiv 2D_1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_{24}.$$

Les courbes D_1 sont d'ordre 18 et le système $|D_1|$ a le degré 42, le genre 40 et la dimension au moins égale à 13. Il en résulte que les courbes D_1 sont en général irréductibles.

Il existe une surface F_1, du sixième ordre, irréductible, inscrite dans F le long de D_1. Cette surface F_1 possède 24 points doubles coniques.

Désignons par C_1 les sections planes de la surface F_1 et par $\gamma'_1, \gamma'_2, \ldots, \gamma'_{24}$ les courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes aux points doubles de cette surface. Nous avons, sur F_1,

$$6C_1 \equiv 2D_1 + \gamma'_1 + \gamma'_2 + \cdots + \gamma'_{24}.$$

On va montrer qu'il existe nécessairement des surfaces du quatrième ordre passant par les 24 points doubles coniques de F_1 et inscrites dans cette surface le long de courbes D' d'ordre 12.

Observons tout d'abord que les courbes D_1, d'ordre 18, forment un système linéaire $|D_1|$ de degré 42, de genre 40 et par suite, puisque F_1 est de genre $p_a = 10$, de dimension $r_1 \geqslant 13$.

Sur une section plane C_1 de genre 10, les courbes D_1 découpent une série d'ordre 18 qui est, soit la série canonique, de dimension 9, soit une série paracanonique, de dimension 8.

Si c'est une série paracanonique, les courbes D_1 passant par 9 points d'une courbe C_1 contiennent cette courbe et sont complétées par des courbes D', en nombre ∞^{r_1-9}. Il existe une surface du sixième ordre, inscrite dans la surface F_1, le long d'une courbe $D' + C_1$; cette surface comprend nécessairement le plan de C_1 compté deux fois et par conséquent, il existe une surface du quatrième ordre inscrite dans F_1 le long de D'. Par construction, cette surface du quatrième ordre passe d'ailleurs par les points doubles de F_1.

Si les courbes D_1 découpent sur une section plane C_1 la série canonique, il existe ∞^{r_1-10} courbes D_1 comprenant cette courbe C_1 comme partie. On voit, comme dans le cas précédent, qu'il existe des surfaces du quatrième ordre passant par les 24 points doubles de F_1 et inscrites dans cette surface le long de courbes D' d'ordre 12.

Dans les deux cas, on a

$$4C_1 \equiv 2D' + \gamma'_1 + \gamma'_2 + \dots + \gamma'_{24}.$$

Il est maintenant facile de voir que la surface F_1 présente les mêmes propriétés que la surface F. On en conclut en particulier que le système $|D'|$ a la dimension 4 et est régulier. Par suite, les courbes D_1 découpent sur une section plane C_1 de F_1, une série paracanonique.

Les surfaces F, F_1 déterminent un faisceau de surfaces du sixième ordre se raccordant le long d'une courbe D_1. Chacune de ces surfaces possède 24 points doubles coniques variables sur la courbe D_1.

10. Considérons, sur la surface F, les courbes D_2 satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$8C \equiv 2D_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{24}.$$

Ces courbes D_2 sont d'ordre 24, forment un système linéaire $|D_2|$ de degré 84, de genre 67 et par conséquent de dimension au moins égale à 28. Il existe donc des courbes D_2 irréductibles et le long d'une telle courbe, il existe une surface irréductible F_2, du huitième ordre, inscrite dans la surface F.

Considérons une de ces surfaces F_2 ; elle possède 72 points doubles sur la courbe de contact D_2. Désignons par C_2 les sections planes de F_2, par $\gamma_1'', \gamma_2'', \ldots, \gamma_{72}''$ les courbes rationnelles de degré — 2 équivalentes aux points doubles de la surface. Sur cette surface, on a

$$6C_2 \equiv 2D_2 + \gamma_1'' + \gamma_2'' + \ldots + \gamma_{72}''.$$

Sur F_2, la courbe D_2 appartient à un système $|D_2|$ de degré 36, de genre 67 et, comme F_2 est de genre arithmétique $p_a = 35$, de dimension $r_2 \geqslant 5$.

Considérons un plan σ coupant F suivant une sextique C et F_2 suivant une courbe C_2 d'ordre huit, ces deux courbes se touchant en 24 points formant un groupe G, section par σ d'une courbe D_2. Supposons que sur la courbe C_2, le groupe G ait un indice de spécialité supérieur à l'unité, c'est-à-dire qu'il passe par G une infinité de quintiques du plan σ. Celles-ci découpent sur C, en dehors de G, des groupes G' de six points formant une série linéaire de dimension au moins égale à un. Il en résulte que l'indice de spécialité d'un groupe G', sur C, est au moins égal à 5. En d'autres termes, par les six points d'un groupe G', passent au moins ∞^4 cubiques planes, ce qui est absurde. Par conséquent, les courbes D_2 de F_2 découpent, sur une section plane C_2 de cette surface, une série de spécialité un ou une série non spéciale.

Plaçons-nous dans cette seconde hypothèse. La série découpée sur une courbe C_2 par les courbes D_2 a la dimension trois et les ∞^{r_2-4} courbes D_2 passant par quatre points de C_2 comprennent cette courbe comme partie.

Elles sont complétées par des courbes D_2' d'ordre 16, satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$4C_2 \equiv 2D_2' + \gamma_1'' + \gamma_2'' + \dots + \gamma_{72}''.$$

Mais une courbe D_2' satisfaisant à cette relation a le degré — 4 et est donc isolée ; on doit donc avoir $r_2 = 4$. Or, on a trouvé $r_2 \geqslant 5$. On en conclut que les courbes D_2 ne peuvent découper sur une courbe C_2 une série non spéciale ; la série en question doit donc avoir l'indice de spécialité égal à l'unité et elle a par suite la dimension 4. En reprenant le raisonnement précédent, on voit qu'il existe ∞^{r_2-5} courbes D_2' satisfaisant à la relation fonctionnelle ci-dessus. On a donc $r_2 = 5$ et $|D_2|$ est un système régulier.

La courbe D_2' a le genre 31 et appartient par conséquent à une seule surface du quatrième ordre F_2'. Cette surface du quatrième ordre touche la surface F_2 le long de la courbe D_2' ; elle possède huit points doubles coniques sur cette courbe.

Il est facile de montrer qu'il existe des surfaces du sixième ordre, du quatrième ordre et des quadriques passant par les huit points doubles de F_2' et inscrites dans cette surface. Il suffit de reprendre le raisonnement précédent, simplifié ici par le fait que les sections planes de F_2' sont de genre 3. On montre ainsi que F_2' est l'enveloppe d'un système de quadriques d'indice deux et de dimension un. Inversement, on peut remonter de cette dernière surface à la surface F_2.

Liége, le 15 avril 1944.