Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des Sciences)
Séance du 6 décembre 1958

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles (addition),

par Lucien GODEAUX.
Membre de l'Académie.

*Résumé.* — On donne une démonstration plus simple des résultats exposés au N° 3 de la note précitée [1].

Dans l'hypothèse envisagée au N° 3, la surface F possède une courbe six-canonique formée d'une part de trois courbes bicanoniques $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$, $\Gamma_5 + \Gamma_6$ et d'autre part de deux courbes tricanoniques $\Gamma_1 + \Gamma_3 + \Gamma_5$, $\Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_6$.

On a

$$\Gamma_1' = \Gamma_4 + \Gamma_6,\ \Gamma_3' = \Gamma_6 + \Gamma_2\,;\ \Gamma_5' = \Gamma_2 + \Gamma_4,$$
$$\Gamma_2' = \Gamma_3 + \Gamma_5,\ \Gamma_4' = \Gamma_5 + \Gamma_1,\ \Gamma_6' = \Gamma_1 + \Gamma_3.$$

En désignant par $n_i$, $\pi_i$ le degré et le genre de $\Gamma_i$ et par $n_{ik}$ le nombre de points communs aux courbes $\Gamma_i$, $\Gamma_k$, on en déduit

$$\begin{aligned} &2\pi_1 - 2 = n_{14} + n_{16},\ 2\pi_3 - 2 = n_{23} + n_{36},\ 2\pi_5 - 2 = n_{35} + n_{45}, \\ &2\pi_2 - 2 = n_{23} + n_{25},\ 2\pi_4 - 2 = n_{14} + n_{45},\ 2\pi_6 - 2 = n_{16} + n_{36}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Le théorème de Riemann-Roch, appliqué aux courbes $\Gamma$, qui sont isolées, donne

$$n_i = \pi_i - 1,$$

[1] Cette note est parue dans le Bulletin de l'Académie, octobre 1958, pp. 738-749.

et en exprimant que le faisceau bicanonique a le degré et le genre quatre, on a

$$n_{12} = n_{34} = n_{56} = 1, \quad \pi_1 + \pi_2 = \pi_3 + \pi_4 = \pi_5 + \pi_6 = 4.$$

D'autre part, on a

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_3 + \Gamma_4 \equiv \Gamma_5 + \Gamma_6,$$

d'où

$$\begin{gathered} \pi_1 = n_{13} + n_{14} = n_{15} + n_{16}, \ \pi_3 = n_{13} + n_{23} = n_{35} + n_{36}, \\ \pi_5 = n_{15} + n_{25} = n_{35} + n_{45}, \\ \pi_2 = n_{23} + n_{24} = n_{25} + n_{26}, \ \pi_4 = n_{14} + n_{24} = n_{45} + n_{46}, \\ \pi_6 = n_{16} + n_{26} = n_{36} + n_{46}. \end{gathered} \tag{2}$$

De la première des relations (2), on tire

$$2\pi_1 = n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16}$$

et par la première des équations (1),

$$n_{13} + n_{15} = 2.$$

De même, on a

$$\begin{gathered} n_{13} + n_{35} = 2, \ n_{15} + n_{35} = 2, \\ n_{24} + n_{26} = 2, \ n_{24} + n_{46} = 2, \ n_{26} + n_{46} = 2. \end{gathered}$$

De ces relations, on déduit

$$n_{13} = n_{15} = n_{35} = n_{24} = n_{26} = n_{46} = 1,$$

puis, en remontant aux relations (2),

$$n_{14} = n_{16} = n_{23} = n_{25} = n_{45} = n_{36} = n, \ \pi_i = 1 + n.$$

On a

$$\pi_1 + \pi_2 = 2 + 2n = 4,$$

d'où

$$n = 1, \ \pi_i = 2, \ n_i = 1, \ n_{ik} = 1.$$

Considérons les courbes $\Gamma_1 + \Gamma_2$, $\Gamma_3 + \Gamma_4$ et soit $A_{ik}$ le point commun aux courbes $\Gamma_i . \Gamma_k$. Les quatre points A sont les points-base du faisceau bicanonique $|C_2|$ et sont par hypothèse distincts. La courbe $\Gamma_5 + \Gamma_6$ doit donc passer par ces quatre points.

Si $\Gamma_5$ passe par les points $A_{14}$ et $A_{23}$, $\Gamma_6$ par les points $A_{13}$ et $A_{24}$, le couple $A_{13} + A_{14}$ se trouve à la fois sur les courbes $\Gamma_1' = \Gamma_4 + \Gamma_6$ et $\Gamma_2' = \Gamma_3 + \Gamma_4$. Ce couple serait donc à la fois groupe canonique et paracanonique de $\Gamma_1$, ce qui est absurde.

Si $\Gamma_5$ passe par $A_{13}$ et $A_{24}$, $\Gamma_6$ par $A_{14}$ et $A_{23}$, le même raisonnement montre que sur la courbe $\Gamma_6$, le couple $A_{14} + A_{23}$ est à la fois canonique et paracanonique, ce qui est absurde.

On retrouve donc le résultat que nous avions obtenu, par une voie moins directe, dans notre travail. Le cas envisagé ne peut se présenter.

Taormina, le 30 octobre 1958.