Sur les transformations de Jonquières involatives, /u

par Lucien GODEAUX, Membre de la Société.

Dans cette note, nous étudions la transformation de Jonquières involutive présentant quatre points unis [1]. Nous construisons des surfaces images de l'involution et appelons l'attention sur une propriété assez curieuse des systèmes binaires de courbes transformés en eux-mêmes par la transformation. Un tel système comprend en général deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, dont l'un a pour point-base les quatre points unis. Du système que nous construisons au début, on peut déduire un autre système où les rôles des systèmes partiels appartenant à l'involution sont intervertis.

Nous terminerons en démontrant d'une manière élémentaire que l'involution est rationnelle, propriété bien connue [2].

1. — Soit T une transformation de Jonquières du plan σ, involutive, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Supposons qu'elle fasse correspondre aux droites du plan des courbes G d'ordre m ayant un point-base O multiple d'ordre $m-1$ et $2m-2$ points base simples $O_1\ O_2, \ldots, O_{2m-2}$.

La transformation T détermine, dans le faisceau de centre O, une involution que l'on peut écrire sous la forme

$$x_1' : x_2' = x_2 : x_1.$$

Ses équations ont alors la forme

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= x_2\,[x_3\,\alpha_{m-2}(x_1, x_2) - \alpha_{m-1}(x_1, x_2)]\\
\rho x_2' &= x_1\,[x_3\,\alpha_{m-2}(x_1, x_2) - \alpha_{m-1}(x_1, x_2)]\\
\rho x_3' &= x_3\,\beta_{m-1}(x_1, x_2) + \alpha_m(x_1, x_2)
\end{aligned}$$

---

[1] Nous avons déjà consacré une courte note au même objet, à propos d'un travail de M. Emch (*The Tôhoku Mathem. Journal*, 1927).

[2] Nous aurons à utiliser certaines propriétés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. On peut consulter sur cet objet notre exposé : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient., n° 270, Paris, Hermann, 1935).

où α_{m-2}, α_{m-1}, β_{m-1}, α_m sont des formes algébriques en x_1, x_2 dont les degrés sont indiqués par les indices.

La transformation inverse, T^{-1}, a pour équations

$$\rho x_1' = x_2 [x_3 \alpha_{m-2} (x_2, x_1) - \beta_{m-1} (x_2, x_1)]$$

$$\rho x_2' = x_1 [x_3 \alpha_{m-2} (x_2, x_1) - \beta_{m-1} (x_2, x_1)]$$

$$\rho x_3' = x_3 \alpha_{m-1} (x_2, x_1) + \alpha_m (x_2, x_1)$$

Pour notre objet, T et T^{-1} doivent être identiques, ce qui exige

$$\alpha_{m-2} (x_2, x_1) \equiv \alpha_{m-2} (x_1, x_2)$$

$$\alpha_m (x_2, x_1) \equiv \alpha_m (x_1, x_2) \quad .$$

$$\beta_{m-1} (x_2, x_1) \equiv \alpha_{m-1} (x_1, x_2)$$

Observons que si m est impair, α_{m-2} et α_m sont divisibles par $x_1 + x_2$.

Les points unis de la transformation sont donnés par

$$x_1 = x_2, \quad x_3^2 \alpha_{\ } (x_1, x_2) - x_3 [\alpha_{m-1} (x_1, x_2) + \alpha_{m-1} (x_2, x_1)] - \alpha_m (x_1, x_2) = 0,$$

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3^2 \alpha_{m-2} (x_1, x_2) - x_3 [\alpha_{m-1} (x_1, x_2) - \alpha_{m-1} (x_2, x_1)] + \alpha_m (x_1, x_2) = 0.$$

Si m est impair, on voit que tous les points de la droite $x_1 + x_2 = 0$ sont unis. Par conséquent, pour que T ne possède qu'un nombre fini de points unis, il faut que m soit pair. Nous poserons $m = 2n$ et les équations de T s'écriront

$$\rho x_1' = x_2 [x_3 \alpha_{2n-2} (x_1, x_2) - \alpha_{2n-1} (x_1, x_2)]$$

$$\rho x_2' = x_1 [x_3 \alpha_{2n-2} (x_1, x_2) - \alpha_{2n-1} (x_1, x_2)]$$

$$\rho x_3' = x_3 \alpha_{2n-1} (x_2, x_1) + \alpha_{2n} (x_1, x_2)$$

sous les conditions

$$\alpha_{2n-2} (x_2, x_1) \equiv \alpha_{2n-2} (x_1, x_2), \alpha_{2n} (x_2, x_1) \equiv \alpha_{2n}(x_1, x_2) .$$

Les points unis sont donnés par

$$x_1 = x_2, \quad x_3^2 \alpha_{2n-2} (1, 1) - 2x_3 x_1 \alpha_{2n-1} (1, 1) - x_1^2 \alpha_{2n}(1, 1) = 0$$

$$x_1 + x_2 = 0, \ x_3^2 \alpha_{2n-2} (1, -1) - 2x_3 x_1 [\alpha_{2n-1}(1, -1) - \alpha_{2n-1} (-1, 1)] + x_1^2 \alpha_{2n} (1, -1) = 0.$$

Ils sont donc au nombre de quatre; nous les désignerons par A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, les deux premiers étant situés sur la droite $x_1 = x_2$ et les deux derniers sur la droite $x_1 + x_2 = 0$.

2. — Désignons par g les droites du plan σ et formons le système linéaire complet

$$|C| = |g + G|.$$

Les courbes C sont d'ordre $2n + 1$, ont la multiplicité $2n - 1$ en O et passent simplement par les points O_1, O_2, ..., O_{4n-2}, intersections, en dehors de O, des courbes

$$x_3\, \alpha_{2n-2}(x_1, x_2) - \alpha_{2n-1}(x_1, x_2) = 0$$

$$x_3\, \alpha_{2n-1}(x_2, x_1) + \alpha_n(x_1, x_2) = 0\ .$$

Le système $|C|$ a donc le degré $4n + 2$ et le genre $2n - 1$. La série caractéristique de ce système étant non spéciale, $|C|$ est régulier et a la dimension $r = 2n + 4$. Il est transformé en lui-même par T.

Le système $|C|$ contient les courbes formées d'une droite g et de sa transformée G. De telles courbes sont en nombre ∞^2 et forment un système d'indice deux, nécessairement compris dans un système linéaire partiel $|C_o|$, de dimension $r_o > 2$, composé au moyen de l'involution I_2 engendrée par T dans σ, et n'ayant pas d'autres points-base que ceux de $|C|$.

Considérons un faisceau de droites g et le faisceau des courbes G que T leur fait correspondre. Ces deux faisceaux sont projectifs et les intersections des éléments homologues engendrent une courbe C passant par les quatre points unis de T; elle est transformée en soi par T et appartient à un système linéaire partiel $|C_1|$, de dimension au moins égale à 2, appartenant à l'involution I_2. Le système $|C_1|$ a les mêmes points-base que le système $|C|$ et en outre, les quatre points unis de I_2, qui sont des points-base simples.

Sur le système $|C|$ dont les courbes sont considérées comme des éléments , T agit comme une homoquestrie harmonique dont les courbes C_o, C_1 sont les éléments unis. Si r_o et r_1 sont les dimensions de $|C_o|$, $|C_1|$, on a donc

$$r_o + r_1 = r - 1 = 2n + 3\ . \qquad (1)$$

3. — Rapportons projectivement les courbes C_o aux hyperplans d'un espace linéaire à r_o dimensions. Aux couples de points de l'involution I_2 correspondent les points d'une surface F_o, d'ordre $2n + 1$, normale, dont nous désignerons les sections hyperplanes par Γ_o. Ces courbes ont, d'après la formule de Zeuthen, le genre n. Le système $|\Gamma_o|$ a la série caractéristique non spéciale et par conséquent la dimension $n + 1$. On voit que, d'après un théorème classique de M. Castelnuovo, F_o est rationnelle et que par conséquent, $|\Gamma_o|$ étant régulier, on a $r_o = n + 2$. Si l'on veut faire abstraction du théorème de M. Castelnuovo, on peut seulement écrire $r_o \leqslant n + 2$.

Rapportons de même projectivement les courbes C_1 aux hyperplans d'une espace linéaire à r_1 dimensions. Aux couples de I_2 correspondent les points d'une surface F_1, normale, d'ordre $2n - 1$, dont nous désignerons les sections hyperplanes par Γ_1.

D'après la formule de Zeuthen, les courbes Γ_1 ont le genre $n - 1$ et par conséquent la série caractéristique du système $|\Gamma_1|$ est non spéciale. On en conclut que l'on a $r_1 \leqslant n + 1$ (L'égalité ayant certainement lieu si l'on utilise le théorème de Castelnuovo sur la rationnalité de F_1).

Des relations $r_o \leqslant n + 2$, $r_1 \leqslant n + 1$ et de l'égalité (1), on conclut

$$r_o = n + 2, \; r_1 = n + 1 .$$

4. — Reprenons la surface F_o, normale, d'ordre $2n + 1$, dans l'espace S_{n+2}. Aux points unis $A_{11}, \ldots, A_{22}$, de l'involution I_2 correspondent sur F_o des points doubles coniques $A'_{11}, \ldots, A'_{22}$.

Considérons dans σ une droite s passant par O et la droite s' que T lui fait correspondre. Aux couples de I_2 situés sur s, s' correspondent sur F_o les points d'une courbe γ. Une courbe C_o rencontrant le couple de droites s, s' suivant deux couples de l'involution, la courbe γ rencontre les courbes Γ_o en deux points et est par conséquent une conique. Il existe donc sur F_o, ∞^1 coniques γ formant un faisceau, linéaire, $|\gamma|$.

Aux points infiniment voisins de O, T fait correspondre les points de la courbe

$$x_3 \, \alpha_{2n-2}(x_1, x_2) - \alpha_{2n-1}(x_1, x_2)$$

que nous désignerons par G_o. A l'ensemble des groupes de l'involution formés par ces points correspond sur F_0 une courbe que nous désignerons par γ_0. Cette courbe est rationnelle et d'ordre $2n - 1$.

Supposons que s ne soit pas tangente en O à la courbe G_0; il en est de même de s'. Au point infiniment voisin de O sur s, T fait correspondre le point de s' situé sur G_0 et distinct de O. A ce couple, correspond un point de γ_0 situé sur le conique γ. Au couple formé du point de s' infiniment voisin de O et du point de rencontre de s avec G_0 en dehors de O correspond un second point commun à γ et à γ_0. Supposons maintenant que s soit une tangente à G_0 en O; il en est de même de s', puisque

$$\alpha_{2n-2}(x_1, x_2) \equiv \alpha_{2n-2}(x_2, x_1) .$$

Les deux couples de points précédents viennent se confondre en un seul, formé des points de s, s' infiniment voisins de O. Le point correspondant sur F_0 est double pour la courbe γ_0.

La courbe γ_0 possède donc $n - 1$ points doubles.

La courbe $s + s' + G_0$ est une courbe C_0, par conséquent les hyperplans contenant γ_0 découpent sur F_0 les coniques γ. Il en résulte que γ_0 appartient à un espace S_n à n dimensions.

Les points $O_1, O_2, \ldots, O_{4n-2}$ se trouvent distribués sur les $4n - 2$ droites

$$\alpha_{2n-2}\, \alpha_{2n} - \alpha_{2n-1}(x_1, x_2)\, \alpha_{2n-1}(x_2, x_1) = 0 .$$

Il en résulte que le point O_1 a pour droite fondamentale associée la droite joignant O à un des points $O_2, O_3, \ldots, O_{4n-2}$, par exemple la droite OO_2. Alors, au point O_2, T associe la droite OO_1. Aux couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_1 et d'un point de OO_2, correspondent les points d'une droite tracée sur F_0. De même, aux couples de I_2 formés d'un point infiniment voisin de O_2 et d'un point de la droite OO_1 correspondent sur F_0 les points d'une droite qui, avec la première, forme la conique γ correspondant au couple de droites OO_1, OO_2.

Il en résulte que dans le faisceau $|\gamma|$ se trouvent $2n - 1$ coniques dégénérées en deux droites distinctes.

Appelons s_1, s_2 les droites passant par O et la première par les points A_{11}, A_{12}, la seconde par les points A_{21}, A_{22}, Sur la droite s_1, T détermine une involution ayant comme points unis A_{11}, A_{12} et il lui correspond par conséquent sur F_0 une droite γ_1. Cette droite passe par les points A'_{11}, A'_{12} et, comptée deux fois, forme une conique γ. De même, à s_2 correspond une droite γ_2 passant par A'_{21}, A'_{22} et qui, comptée deux fois, forme une conique du faisceau $|\gamma|$.

5. — Appelons Γ_1 les courbes qui correspondent sur F_o aux courbes C_1 et par conséquent aux sections hyperplanes de F_1. Sur F_o, les courbes Γ_1 sont d'ordre $2n + 1$; elles passent, simplement, par les points de diramation $A'_{11}, \ldots, A'_{22}$.

A une courbe C (et à sa transformée par T) correspond sur F_o une courbe Γ possédant $2n + 1$ points doubles variables, homologues des couples de I_2 appartenant à la courbe et à sa transformée. Lorsque la courbe C varie d'une manière continue dans $|C|$ et tend vers une courbe C_o, la courbe Γ tend vers une courbe Γ_o comptée deux fois, donc les courbes Γ sont découpées sur F_o par des hyperquadriques. Lorsque la courbe C tend vers une courbe C_1, la courbe Γ tend vers une courbe Γ_1 comptée deux fois. Il en résulte qu'il existe une hyperquadrique inscrite dans la surface F_o le long de chaque courbe Γ_1.

Chacun des points $A'_{11}, \ldots, A'_{22}$ est équivalent à une courbe rationnelle de degré -2. Si nous désignons par a_{ik} la courbe rationnelle équivalente au point double A'_{ik}, nous avons

$$2\Gamma_o \equiv 2\Gamma_1 + a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} .$$

Les courbes Γ_1 rencontrent en deux points les coniques γ et en $2n - 1$ points la courbe γ_o.

6. — Appelons F'_o la projection, à partir des points $A'_{11}, \ldots, A'_{22}$, de la surface F_o sur un espace linéaire à $n - 2$ dimensions, et Γ'_o ses sections hyperplanes.

Aux courbes Γ'_o correspondent dans σ les courbes C_o passant par les points unis $A_{11}, \ldots, A_{22}$. Ces points sont doubles pour ces courbes et par conséquent, les droites s_1, s_2 appartiennent comme parties fixes aux courbes C_o considérées. On en conclut qu'aux courbes Γ'_o correspondent dans σ des courbes d'ordre $2n - 1$, ayant un point multiple d'ordre $2n - 3$ en O, passant simplement par les points $O_1, O_2, \ldots, O_{4n-2}, A_{11}, \ldots, A_{22}$. Nous désignerons ces courbes par C'_o. Elles forment un système linéaire $|C'_o|$ de degré $4n - 10$, de genre $2n - 3$ et de dimension $n - 2$. Il en résulte que la surface F'_o est d'ordre $2n - 5$. En utilisant la formule de Zeuthen, on trouve que les courbes Γ'_o sont de genre $n-2$.

Aux domaines des points de diramation de F_o correspondent sur F'_o quatre droites $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Les deux premières se rencontrent en un point qui correspond à la droite γ_1 et les deux dernières en un point qui correspond à la droite γ_2.

Aux coniques γ de F_o correspondent sur F'_o des coniques que nous désignerons encore par γ. Elles forment un faisceau qui contient les $2n-1$ coniques dégénérées en deux droites provenant des points-base simples de $|C|$ et en outre, les coniques $a_{11}+a_{12}, a_{21}+a_{22}$.

A la courbe γ_o correspond sur F'_o une courbe d'ordre $2n-3$, et les hyperplans passant par cette courbe découpent sur F'_o les coniques du faisceau $|\gamma|$. Cette courbe passe par les points communs aux droites a_{11} et a_{12}, a_{21} et a_{22}.

Aux courbes Γ_1 correspondent sur F'_o des courbes que nous désignerons encore par Γ_1; elles sont d'ordre $2n-3$ et rencontrent en un point variable chacune des droites $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$.

7. — Projetons la surface F'_o des points communs aux droites a_{11} et a_{12}, a_{21} et a_{22}, sur un espace linéaire à $n-4$ dimensions. Soient F''_o la surface ainsi obtenue et Γ''_o ses sections hyperplanes.

Aux courbes Γ''_o correspondent dans σ des courbes C'_o comprenant les droites s_1, s_2 comme parties et complétées par des courbes C''_o d'ordre $2n-3$, passant $2n-5$ fois par O et une fois pas $O_1, O_2, \ldots, O_{4n-2}$, mais ne passant plus par les points unis $A_{11}, \ldots, A_{22}$. Le système $|\Gamma''_o|$ a le degré $4n-14$, le genre $2n-5$ et la dimension $n-4$.

La surface F''_o a par conséquent l'ordre $2n-7$, ses sections hyperplanes Γ''_o ont le genre $n-2$.

On peut reprendre, en partant du système $|C''_o|$, les raisonnements qui ont été faites plus haut en partant du système $|C_o|$. La surface F''_o possède quatre points, doubles coniques $A'_{11}, A'_{12}, A'_{21}, A'_{22}$ qui correspondent aux quatre points unis. Elle possède en outre un faisceau de coniques $|\gamma|$ contenant $2n-1$ coniques dégénérées en deux droites et deux coniques dégénérées en deux droites confondues γ_1, passant par les points A'_{11}, A'_{12} et γ_2, passant par les points A'_{21}, A'_{22}.

A l'ensemble des points infiniment voisins de O et de la courbe

G_o, correspond une courbe rationnelle γ_o, d'ordre $2n - 5$, possédant $n - 1$ points doubles. Cette courbe appartient à un espace à $n - 6$ dimensions et les hyperplans passant par cet espace découpent sur F''_o les coniques γ.

Ces résultats peuvent aussi s'obtenir en étudiant la projection de la surface F'_o.

8. — La surface F_1, que nous avons rencontrée plus haut, est normale dans un espace S_{n+1}; elle a l'ordre $2n - 1$ et ses sections hyperplanes Γ_1, de genre $n - 1$, correspondent aux courbes C_1.

Aux couples de droites passant par O et homologues dans T correspondent sur F_1 des coniques γ, forment un faisceau linéaire $|\gamma|$. Il existe dans ce faisceau $2n - 1$ coniques dégénérées en deux droites, provenant des points $O_1, O_2, \ldots, O_{4n-2}$, comme sur la surface F_o.

Aux points unis $A_{11}, \ldots, A_{22}$, qui sont des points-base simples de $|C_1|$, correspondent sur F_1 des droites $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. Les deux premières se coupent en un point, qui correspond aux couples de l'involution I_2 appartenant à la droite s_1, fondamentale pour le système $|C_1|$. Les droites a_{21}, a_{22} se coupent également en un point correspondant à la droite s_2. Les deux points ainsi obtenus sont simples pour F_1. On obtient ainsi deux coniques $a_{11} + a_{12}$, $a_{21} + a_{22}$, dégénérées, appartenant à $|\gamma|$.

Au domaine du point O et à la courbe G_o correspond sur F_1 une courbe γ_o, d'ordre $2n - 1$, rationnelle, possédant $n - 1$ points doubles, passant par les points communs aux droites a_{11} et a_{12}, a_{21} et a_{22}. La courbe G_o, jointe aux droites s_1, s_2, forme une courbe C_1, par conséquent la courbe γ_o est une section hyperplane de F_1.

Projetons la surface F_1 des points communs aux droites a_{11} et a_{12}, a_{21} et a_{22}, sur un espace S_{n-1} à $n - 1$ dimensions. On obtient une surface F'_1 dont les sections hyperplanes Γ'_1 correspondent aux courbes C_1 contenant les droites s_1 et s_2. Ces courbes sont complétées par des courbes C'_1 d'ordre $2n - 1$, passent $2n - 3$ fois par O, une fois par les points $O_1, O_2, \ldots, O_{4n-2}$, mais ne passant plus par les points unis de l'involution.

Reprenant le raisonnement fait à propos de la surface F_o, on voit que la surface F'_1 est d'ordre $2n - 3$, que ses sections hyperplanes Γ'_1 sont de genre $n - 1$, qu'elle possède quatre points doubles coniques correspondant aux points unis de l'involution et un faisceau de coniques $|\gamma|$.

Dans le faisceau $|\gamma|$ se trouvent $2n - 1$ coniques dégénérées en deux droites et deux coniques dégénérées en deux droites γ_1, γ_2, la première passant par les points doubles A'_{11}, A'_{12} homologues de A_{11}, A_{12}, la seconde par les points doubles A'_{21}, A'_{22} homologues des points A_{21}, A_{22}.

A la courbe γ_o correspond une courbe que nous désignerons toujours par le même symbole γ_o, d'ordre $2n - 3$, qui est une section hyperplane de la surface.

Les courbes C'_o, C'_1 appartiennent à un même système linéaire $|C'|$, de dimensions $2n - 2$. On le déduit de $|C|$ en considérant les courbes C qui contiennent deux droites passant par O, homologues dans T, ce qui fait bien six conditions.

On a d'autre part

$$2\Gamma'_1 \equiv 2\Gamma'_o + a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}\,,$$

ce que l'on pourrait déduire de la première relation fonctionnelle entre les courbes Γ_o, Γ_1 en remarquant que

$$\Gamma_o \equiv \Gamma'_o + 2(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}), \quad \Gamma'_1 \equiv \Gamma_1$$

puisque les courbes Γ'_1 sont des courbes Γ_1 passant par deux points simples de F_1.

En projetant F'_1 des quatre points doubles $A'_{11}, \ldots, A'_{22}$ sur un espace linéaire S_{n-5} à $n - 5$ dimensions, on obtiendrait une surface F''_1 analogue à F_1. Les sections hyperplanes Γ''_1 de F''_1 correspondent aux courbes C'_1 de σ passant par les points unis de l'involution et comprenant comme parties les droites s_1, s_2. Soient C''_1 les courbes qui, jointes à s_1, s_2, forment des courbes C'_1.

Les courbes C''_o, C''_1 appartiennent à un même système linéaire $|C''|$ de dimension $2n - 8$, déduit de $|C'|$ en défalquant des courbes de ce système deux droites passant par O et se correspondant dans T, et ainsi de suite.

9. — On peut opérer sur F''_o, F''_1 comme on a opéré sur F_o et F_1, et ainsi de suite.

Considérons le système $|C^{(i)}|$ obtenu en défalquant du système $|C|$ i couples de droites passant par O et homologues dans T.

Ce système a la dimension $2n + 4 - 6i$ et est formé de courbes d'ordre $2n + 1 - 2i$, passant $2n - 1 - 2i$ fois par O et une fois par les points $O_1, O_2, \ldots, O_{4n-2}$. Le système $|C^{(i)}|$ a donc le degré $4n + 2 - 8i$ et le genre $2n - 2i - 1$. Il contient deux systèmes linéaires partiels $|C_o^{(i)}|$, $|C_1^{(i)}|$ appartenant à l'involution I_2. Si i est impair, les courbes du premier passent par les points unis; si i est pair, ce sont les courbes du second.

Supposons i impair. En rapportant projectivement les courbes $C_o^{(i)}$ aux hyperplans d'un espace à un nombre convenable de dimensions, on obtient une surface $F_o^{(i)}$ d'ordre $2n - 4i - 1$, dont les sections hyperplanes ont le genre $n - i - 1$.

En partant du système $|C_1^{(i)}|$, on construit une surface $F_1^{(i)}$ d'ordre $2n - 4i + 1$, à sections hyperplanes de genre $n - i$. Cette surface possède quatre points doubles coniques aux points de diramation.

Les systèmes $|C_o^{(i)}|$ et $|C_1^{(i)}|$ ont respectivement les dimensions $n - 3i + 1$, $n - 3i + 2$.

Si i est pair, on obtient de même une surface $F_o^{(i)}$ d'ordre $2n - 4i + 1$, à sections hyperplanes de genre $n - 2i$ et une surface $F_{1(i)}$ d'ordre $2n - 4i - 1$, à sections hyperplanes de genre $n - 2i - 1$.

Les systèmes $|C_o^{(i)}|$ et $|C_1^{(i)}|$ ont cette fois les dimensions respectives $n - 3i + 2$ et $n - 3i + 1$.

La surface $F_o^{(i)}$ possède quatre points doubles coniques aux points de diramation.

10. — Nous allons maintenant démontrer que l'involution I_2, c'est-à-dire la surface F_o image de cette involution, est rationnelle. Dans ce but nous prouverons l'existence, sur F_o, d'une courbe unisécante des coniques γ.

Supposons pour fixer les idées que T fasse correspondre aux domaines des points $O_1, O_3, \ldots, O_{2n-1}$ respectivement les ponctuelles $OO_2, OO_4, \ldots, OO_{4n-2}$ et par conséquent aux domaines des points $O_2, O_4, \ldots, O_{4n-2}$ respectivement les droites $OO_1, OO_3, \ldots, OO_{2n-1}$. Considérons une courbe D, d'ordre n, passent $n - 1$ fois par O et une fois par $O_1, O_3, \ldots, O_{2n-1}$. Un compte de constantes montre qu'il existe au moins ∞^1 de ces courbes.

La transformation T fait correspondre à la courbe D une courbe D′ de même nature, distincte ou non de la précédente. Il en résulte que le système linéaire $|D|$, ∞^1 au moins, est transformé en soi par T. Il existe donc des courbes de ce système transformées en elles-mêmes par T. Soit D_0 une de ces courbes.

Deux droites s, s', passant par O et conjuguées dans la transformation T, coupent D_0 en un couple de points de l'involution I_2, par conséquent à la courbe D_0, rationnelle, correspond sur F_0 une courbe rationnelle Δ_0. Cette courbe est d'ordre n. La courbe Δ_0, rationnelle, d'ordre n, appartient à un espace linéaire S_ρ à $\rho \leqslant n$ dimensions. Etablissons une projectivité entre les coniques du faisceau $|\gamma|$ et les droites a d'un faisceau $|a|$ d'un plan σ'. Etablissons une seconde projectivité entre les hyperplans d'un faisceau dont l'axe contient S_ρ et les droites b d'un faisceau $|b|$ de σ', distinct de $|a|$. Par un point P sur F_0 passent une conique γ et un hyperplan du faisceau considéré; les droites a et b qui leur correspondent se rencontrent en un point P′ homologue de P. Inversement, à un point P′ de σ' correspond un point P de F_0. Cette surface est donc représentable point par point sur σ' et est par suite rationnelle.

Observons que les courbes D ont pour unisécantes les droites s_1, s_2 (en dehors de O); la courbe D_0 doit rencontrer ces droites chacune en un point uni de l'involution I_2.

La courbe D_0 fait partie d'une courbe C_1 et, en général, de ∞^1 courbes C_0. En général, on a donc $\rho = n$.

Liège, le 28 décembre 1948.