RENDICONTI DEL SEMINARIO DELLA FACOLTÀ DI SCIENZE DELLA UNIVERSITÀ DI CAGLIARI

(*Estratto dal fasc. 1-2 Vol. XXI 1951*)

Geometria algebrica

LUCIEN GODEAUX

# Sopra una particolare involuzione di GEISER

*SUNTO*. — *Si dimostra che se una trasformazione birazionale involutoria muta in sè le cubiche piane per sei punti, T è una particolare trasformazione di* GEISER.

In una nota pubblicata l'anno scorso nei Rendiconti della Facoltà delle Scienze di Cagliari [1], il Prof. T. TURRI scrive, a piè della pagina 35:

« Nella recente opera del GODEAUX: *Géométrie algébrique* (édit. Masson, Paris), al n. 463 si considerano le trasformazioni involutorie che lasciano fisso un sistema lineare $\infty^3$ di cubiche ellittiche. Si dice che se la trasformazione involutoria $T$ ha per corrispondente nello spazio un'omografia armonica centrale $T'$, la $T$ è una involuzione di GEISER (di terzo tipo secondo BERTINI). Osservo che se così fosse, ad una cubica del sistema $\infty^3$ non lasciata fissa dalla $T$, la $T$ stessa farebbe corrispondere una curva di ordine $3.8 - 6.3 = 6$ ».

Credo che si ottiene effettivamente una trasformazione involutoria di GEISER, ma non la trasformazione generale. Vogliamo studiare rapidamente il caso particolare ottenuto e provare così che il nostro ragionamento è corretto.

Consideriamo in un piano $\sigma$ il sistema lineare $|\, C \,|$ delle cubiche per sei punti e sia $T$ una trasformazione birazionale involutoria che muta in sè questo sistema. Diciamo $F$ la superficie cubica rappresentata punto per punto sul piano $\sigma$ e di cui le sezioni piane corrispondono alle curve $C$. Supponiamo che alla $T$ corrisponda una omologia armonica $H$ che muta $F$ in sè.

(1) *Inesistenza di trasformazioni piane cicliche con sei punti fondamentali* (Rend. Facoltà delle Scienze di Cagliari, 1951, pp. 30-35).

Il centro $O$ di $H$ appartiene ad $F$ e l'equazione di questa superficie può scriversi sotto la forma

$$x_4^2 \, f_1 \, (x_1, x_2, x_3) + f_3 \, (x_1, x_2, x_3) = 0,$$

dove $f_1$ e $f_3$ sono forme algebriche di gradi uno e tre.

Il piano tangente $f_1 = 0$ ad $F$ nel punto $O$ contiene tre rette $a_1$, $a_2$, $a_3$ della superficie $F$ e queste rette passano per $O$. Questo punto è dunque un così detto punto di ECKARDT.

Agli intorni dei sei punti-base di $|C|$ corrispondono sopra $F$ sei rette a due a due sghembe. La retta $a_1$ incontra due, $a_{11}$, $a_{12}$ di queste rette, la retta $a_2$, le rette $a_{21}$, $a_{22}$, la retta $a_3$, le rette $a_{31}$, $a_{32}$. Diciamo $A_{ik}$ il punto di $\sigma$ che corrisponde alla retta $a_{ik}$ ed $A$ il punto che corrisponde ad $O$.

Alle rette $a_1$, $a_2$, $a_3$ di $F$ corrispondono nel piano $\sigma$ tre rette $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$ del fascio di vertice $A$; i punti $A_{11}$, $A_{12}$ appartengono alla retta $a'_1$, i punti $A_{21}$, $A_{22}$ alla retta $a'_2$ ed infine i punti $A_{31}$, $A_{32}$ alla retta $a'_3$.

La omologia $H$ genera sopra $F$ una involuzione ed a questa involuzione corrisponde sul piano $\sigma$ una involuzione $I$ di cui le coppie di punti sono intersezioni variabili delle cubiche $C$ che contengono $A$. Dunque $I$, generata da $T$, è una particolar involuzione di GEISER.

Ritorniamo alla superficie $F$. Il piano per $a_1$, $a_{11}$ contiene una terza retta $b_{11}$ di $F$ ed ai punti di $a_{11}$, $H$ fa corrispondere i punti di $b_{11}$. Alla retta $b_{11}$ corrisponde, nel piano $\sigma$, la conica $\beta_{11}$ determinata dai punti $A_{11}$, $A_{21}$, $A_{22}$, $A_{31}$, $A_{32}$. Ai punti infinitamente vicini di $A_{11}$, $T$ fa corrispondere i punti della conica $\beta_{11}$.

Nello stesso modo, si vede che le curve fondamentali associate nella $T$ ai punti $A_{12}, \ldots, A_{32}$ sonó coniche $\beta_{12}, \ldots, \beta_{32}$ che si determinano facilmente.

Il punto $A$ è un punto unito isolato dell'involuzione $I$.

Ad una retta $r$ di $\sigma$, corrisponde su $F$ una cubica gobba $K$ che non incontra le rette $a_{11}, \ldots, a_{32}$ ma incontra ogni retta $b_{11}, \ldots, b_{32}$ in due punti e le rette $a_1$, $a_2$, $a_3$ in un punto. All'intersezione di $F$ e del cono proiettante $K$ da $O$, corrisponde nel piano $\sigma$ una curva del nono ordine con punti tripli $A, A_{11}, \ldots, A_{32}$. Questa curva contiene come parte la retta $r$ e quindi le rette $a'_1$, $a'_2$, $a'_3$.

Noi ne concludiamo che ad una retta di $\sigma$, $T$ fa corrispondere una curva $\Gamma$ del quinto ordine con punti doppi $A_{11}$, $A_{12}$, ..., $A_{32}$.

Dunque, ad una curva $C$, $T$ fa corrispondere una curva del quintodecimo ordine riducibile nelle sei coniche $\beta_{11}, \ldots, \beta_{32}$ ed in una curva $C$.

Bisogna aggiungere che nel passo del nostro libro citato dal Prof. Turri, l'argomento era la dimostrazione del teorema di Bertini sulla riduzione delle trasformazioni birazionali involutorie. A noi non occorreva di studiare la trasformazione $T$, ma bastava stabilire che questa trasformazione è del tipo di Geiser.

*Università di Liegi, il 15 febbraio 1952.*