EXTRAIT de *Mathesis*, LX, 1951.

SUR LA CONSTRUCTION DE CERTAINES QUARTIQUES RATIONNELLES,

par M. LUCIEN GODEAUX,
Professeur à l'Université de Liége..

Nous nous proposons d'indiquer un mode de construction d'une quartique rationnelle dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, peut s'écrire

$$(ax^2 + by^2)^2 - (x^2 + y^2)(cx + d)^2 = 0, \tag{1}$$

a, b, c, d étant des nombres réels satisfaisant à l'inégalité

$$c^2 - 4b(a - b) > 0. \tag{2}$$

1. Dans l'équation (1), le terme indépendant et les termes du premier degré manquent ; les termes du second degré sont $-d^2(x^2 + y^2)$, par conséquent la courbe possède un point double à l'origine, les tangentes étant les droites isotropes. Si l'on s'en tient à la partie réelle de la courbe, l'origine est donc un point isolé de celle-ci.

Les points

$$ax^2 + by^2 = 0, \quad cx + d = 0,$$

réels ou imaginaires suivant que ab est négatif ou positif, sont également doubles pour la courbe (1).

Soient x, y les coordonnées d'un de ces points. L'équation quadratique des tangentes à la courbe en ce point est

$$(X - x)^2[4a^2x^2 - c^2(x^2 + y^2)] + 8abxy(X - x)(Y - y) + \\ + 4b^2y^2(Y - y)^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$4[a(X - x) + b(Y - y)]^2 - c^2(x^2 + y^2)(X - x)^2 = 0.$$

On peut toujours supposer a positif. Si b est négatif, le point (x, y) est réel et les tangentes à la courbe en ce point sont réelles et distinctes, c'est donc un point double ordinaire de la courbe.

Par conséquent, *si* ab < 0, *la courbe* (1) *possède deux points doubles ordinaires* $x = -\frac{d}{c}$, $y = \pm\frac{d}{c}\sqrt{-\frac{a}{b}}$.

2. Passons aux coordonnées polaires en posant $x = \rho \cos \omega$, $y = \rho \sin \omega$. L'équation (1) devient, après suppression du facteur ρ^2,

$$\rho^2(a \cos^2 \omega + b \sin^2 \omega)^2 - (c\rho \cos \omega + d)^2 = 0.$$

Cette équation se scinde en deux autres

$$\rho(a \cos^2 \omega + b \sin^2 \omega) + c\rho \cos \omega + d = 0, \tag{3}$$

$$\rho(a \cos^2 \omega + b \sin^2 \omega) - (c\rho \cos \omega + d) = 0. \tag{4}$$

Si, dans l'équation (4), on remplace ω par $\omega + \pi$ et ρ par $-\rho$, on obtient l'équation (3), donc cette dernière équation représente la courbe entière. On observera toutefois que la courbe (3) ne passe pas par l'origine, alors que ce point est un point isolé de la courbe (1) ; cela provient du fait qu'en passant de (1) à (3), on a supprimé le facteur ρ^2.

Écrivons l'équation (4) sous la forme

$$\rho[(a - b) \cos^2 \omega - c \cos \omega + b] = d.$$

L'équation en $\cos \omega$ qui figure dans le premier membre a ses racines réelles en vertu de l'inégalité (2). Posons

$$a - b = be_1e_2, \quad c = b(e_1 + e_2) ;$$

l'équation précédente s'écrit

$$b\rho[e_1e_2 \cos^2 \omega - (e_1 + e_2) \cos \omega + 1] = d,$$

ou encore

$$\rho = \frac{p}{(1 - e_1 \cos \omega)(1 - e_2 \cos \omega)}, \tag{5}$$

en posant

$$p = \frac{d}{b}.$$

Sous la forme (5), on voit que la courbe (1) est rationnelle.

3. Posons

$$\frac{p}{(1 - e_1 \cos \omega)(1 - e_2 \cos \omega)} = \frac{p_1}{1 - e_1 \cos \omega} + \frac{p_2}{1 - e_2 \cos \omega},$$

c'est-à-dire

$$p = p_1 + p_2 - (p_1e_2 + p_2e_1)\cos \omega.$$

Cette relation devant avoir lieu quel que soit ω, on doit avoir

$$p = p_1 + p_2, \qquad p_1e_2 + p_2e_1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$p_1 = \frac{pe_1}{e_1 - e_2}, \qquad p_2 = \frac{pe_2}{e_2 - e_1}.$$

Désignons par C_1, C_2 les coniques

$$\rho = \frac{p_1}{1 - e_1 \cos \omega}, \qquad \rho = \frac{p_2}{1 - e_2 \cos \omega},$$

pour lesquelles O est un foyer et Ox l'axe focal.

On voit que *pour construire la courbe* (1), *on trace les coniques* C_1, C_2. *Soient* ρ_1, ρ_2 *les segments d'origine* O *découpés par ces coniques sur une demi-droite issue de* O. *Cette demi-droite rencontre la courbe* (1) *à l'extrémité du segment d'origine* O, *de mesure* $\rho_1 + \rho_2$.

4. De la construction précédente résulte que si l'une des coniques C_1, C_2 admet une direction asymptotique, celle-ci est également asymptotique pour la courbe (1).

Supposons que $\omega = \alpha$ soit une solution de l'équation

$$1 - e_1 \cos \omega = 0.$$

$\omega = \alpha$ est une direction asymptotique de la conique C_1 et de la courbe (1). L'asymptote correspondante de C_1 a pour équation

$$\rho = \frac{q_1}{\sin(\alpha - \omega)},$$

où

$$q_1 = - \frac{p_1}{e_1 \sin \alpha} = - \frac{p}{(e_1 - e_2) \sin \alpha}.$$

L'asymptote correspondante de la courbe (1) a pour équation

$$\rho = \frac{q}{\sin(\alpha - \omega)},$$

où

$$q = \frac{-p}{e_1 \sin \alpha (1 - e_2 \cos \alpha)} = - \frac{p}{(e_1 - e_2) \sin \alpha} = q_1.$$

On en conclut que *les asymptotes de la courbe* (1) *coïncident avec les asymptotes éventuelles des coniques* C_1, C_2.

Observons que si C_1 par exemple est une parabole ($e_1 = \pm 1$), l'axe des x est une direction asymptotique de la courbe (1) à laquelle ne correspond aucune asymptote [1].

---

[1] Dans le second volume de notre cours d'*Analyse Mathématique* (Liège, Sciences et Lettres, 1946), on trouvera, p. 188, le dessin de la courbe (5) pour $e_1 = 1$, $e_2 > 1$, $p > 0$.

5. Les points d'inflexion de la courbe (1) ou (5) sont donnés par

$$\frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{\rho}\right)'' = 0,$$

c'est-à-dire par

$$1 + 2e_1e_2 - 3e_1e_2\cos^2\omega = 0.$$

Pour que la courbe possède des points d'inflexion, on doit avoir $e_1e_2 > 1$ si e_1 et e_2 sont de même signe et $|e_1e_2| > \frac{1}{2}$ si e_1 et e_2 sont de signes contraires.

On en conclut que si e_1, e_2 sont de même signe et si $e_1e_2 < 1$, la courbe (5) ne possède pas de points d'inflexion. Les courbes C_1, C_2 sont alors deux ellipses, ou l'une est une ellipse et l'autre une parabole.