EXTRAIT DU *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*
(Séance du 1er juin 1944. — Nos 5-6.)

Sur une involution du second ordre appartenant à une surface d'Enriques,

par LUCIEN GODEAUX, Membre de la Société.

Nous appelons surface d'Enriques la surface dépourvue de courbe canonique, possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, caractérisée par les invariants $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, découverte par M. Enriques [1]. Nous avons considéré autrefois les correspondances rationnelles existant entre deux surfaces d'Enriques [2] et donné quelques exemples d'involutions d'ordre deux, appartenant à une surface d'Enriques et birationnellement équivalentes à une surface d'Enriques [3]. D'autres exemples ont été donnés par Mlle R. F. Johnson [4]. C'est à un exemple d'une involution de même nature qu'est consacrée cette note.

Une surface d'Enriques peut toujours se ramener, par une transformation birationnelle, à l'un des types suivants :

Surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre proprement dit ou d'un angle tétraèdre (Enriques).

Plan double dont la courbe de diramation, d'ordre huit, se compose d'une sextique ayant deux tacnodes et des tangentes tacnodales, le point d'intersection de celles-ci était de plus double pour la sextique (Enriques). Éventuellement, si la sextique possède un autre point double, le plan double peut se ramener à un plan double dont la courbe de diramation, d'ordre dix, se compose des côtés d'un quadrilatère complet et d'une sextique ayant des points doubles aux sommets de ce quadrilatère.

---

(1) Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche (*Mem. Soc. ital. d. Scienze*, 1896, 3e série, t. X, pp. 1-81); Sopra le superficie algebriche di bigenere uno (*Ibidem*, 1906, 3e série, t. XIV, pp. 327-352).

(2) Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1914, pp. 289-312); Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$ (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1913, pp. 178-194); Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un (*Ibidem*, 1915, pp. 89-117).

(3) Sur un plan double de genres zéro et de bigenre un (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, 1926, pp. 527-534); Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un (*Ibidem*, 1926, pp. 726-741, 892-904; 1927, pp. 114-133).

(4) Involutions of order two associated with surfaces of genera $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 1$, $P_3 = 0$ (*American Journal of Math.*, 1933, t. 56, pp. 199-213).

Congruence des droites appartenant à ∞^1 quadriques d'un système linéaire ∞^3, c'est-à-dire surface d'ordre dix de S_5 appartenant à une hyperquadrique et à la base d'un système linéaire ∞^3 d'hypersurfaces cubiques (Fano) ([5]).

L'involution d'ordre deux que nous considérons ici a pour image une surface du douzième ordre de S_5, appartenant à deux hyperquadriques et à une hypersurface cubique. Nous montrons que cette image est bien une surface d'Enriques.

1. L'équation

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3x_4[a_1(x_1^2+x_2^2)+a_2(x_3^2+x_4^2)+a_3x_1x_2+a_4x_3x_4 \\ +a_5(x_1x_3+x_2x_4)+a_6(x_1x_4+x_2x_3)]+b_1x_3^2x_4^2(x_1^2+x_2^2) \\ +b_2x_1^2x_2^2(x_3^2+x_4^2)=0 \end{aligned}$$

représente une surface d'Enriques F passant doublement par les arêtes du tétraèdre de référence. Elle est transformée en soi par l'homographie biaxiale harmonique

$$\frac{x_1'}{x_2}=\frac{x_2'}{x_1}=\frac{x_3'}{x_4}=\frac{x_4'}{x_3}. \tag{H}$$

Cette homographie engendre sur la surface une involution I_2 d'ordre deux présentant quatre points unis : les points de rencontre de F avec les axes

$$x_1=x_2,\quad x_3=x_4\quad \text{et}\quad x_1+x_2=0,\quad x_3+x_4=0$$

de l'homographie, en dehors des arêtes du tétraèdre de référence.

Pour obtenir une image de l'involution I_2, considérons le système de quadriques transformées en elles-mêmes par H,

$$\begin{aligned} \lambda_1(x_1^2+x_2^2)+\lambda_2(x_3^2+x_4^2)+\lambda_3x_1x_2+\lambda_4x_3x_4+\lambda_5(x_1x_3+x_2x_4) \\ +\lambda_6(x_1x_4+x_2x_3)=0. \end{aligned}$$

Rapportons projectivement ces quadriques aux hyperplans d'un espace S_5 en faisant correspondre à la quadrique précédente l'hyperplan

$$\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\lambda_3X_3+\lambda_4X_4+\lambda_5X_5+\lambda_6X_6=0.$$

([5]) Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari (*Rend. Circ. Matem. di Palermo*, 1er sem. 1910, pp. 98-118). Au sujet des surfaces d'Enriques, consulter également P. BURNIAT, Recherches sur les surfaces de bigenre un (*Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liége*, 1936, pp. 1-104).

Les équations de la surface Φ, image de l'involution I_2, sont

$$X_1X_4 + X_2X_3 = X_5X_6,$$
$$X_1X_2 + 4\,X_3X_4 = X_5^2 + X_6^2,$$
$$X_3X_4\,[a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 + a_5X_5 + a_6X_6] + b_1X_1X_4^2 + b_2X_2X_3^2 = 0,$$

La surface Φ est du douzième ordre et est bien l'intersection complète des trois hypersurfaces précédentes.

Les sections de F par des quadriques sont de genre 13 et par conséquent, d'après la formule de Zeuthen, les sections hyperplanes de Φ sont de genre 7. Il en résulte que la surface Φ n'est pas normale et ce fait tient à ce que si $|C|$ désigne le système des sections planes de F, le système $|2C|$ complet n'est pas découpé par les quadriques.

L'adjoint $|C'|$ de $|C|$ est découpé sur F par les surfaces cubiques circonscrites au tétraèdre de référence. On a

$$|2\,C| = |2\,C'|,$$

donc le système complet $|2C|$, de genre 13 et de dimension 12, est découpé par les surfaces du sixième ordre passant doublement par les arêtes du tétraèdre fondamental, c'est-à-dire par les surfaces du système linéaire déterminé par F.

2. Pour obtenir un modèle normal de la surface Φ, posons

$$\rho X_1 = x_1x_2x_3x_4\,(x_1^2 + x_2^2),\ \rho X_2 = x_1x_2x_3x_4(x_3^2 + x_4^2),\ \rho X_3 = x_1^2x_2^2x_3x_4,$$
$$\rho X_4 = x_1x_2x_3^2x_4^2,\ \rho X_5 = x_1x_2x_3x_4\,(x_1x_3 + x_2x_4),$$
$$\rho X_6 = x_1x_2x_3x_4(x_1x_4 + x_2x_3),\ \rho X_7 = x_3^2x_4^2(x_1^2 + x_2^2),\ \rho X_8 = x_1^2x_2^2(x_3^2 + x_4^2),$$

L'élimination des x entre ces équations donne

$$\left\|\begin{matrix} X_1 & X_8 & X_3 \\ X_7 & X_1 & X_4 \end{matrix}\right\| = 0,$$

$$X_1X_4 + X_2X_3 = X_5X_6,\quad X_1X_2 + 4\,X_3X_4 = X_5^2 + X_6^2. \tag{1}$$

Les X étant interprétés comme coordonnées d'un point d'un espace S_7, ces équations représentent une variété normale V_3^{12}, d'ordre 12, image des couples de points de l'involution engendrée dans l'espace par l'homographie H.

Aux points de l'axe

$$x_1 = x_2,\quad x_3 = x_4$$

de H correspondent sur V_3^{12} les points de la conique situés dans le plan

$$X_1 = 2\,X_3 = X_8,\ X_2 = 2\,X_4 = X_7,\ X_5 = X_6$$

et sur l'hyperquadrique

$$X_1 X_2 = X_5^2.$$

Cette conique est double pour la variété V_3^{12}, car les hyperquadriques (1) se touchent le long de cette courbe.

De même, à l'axe

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0$$

de H correspond sur V_3^{12} une conique double d'équations

$$X_1 = -2\,X_3 = X_8, \quad X_2 = -2\,X_4 = X_7, \quad X_5 = X_6, \quad X_1 X_2 + X_5^2 = 0;$$

à la surface F correspond la section de V_3^{12} par l'hyperplan

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + b_1 X_7 + b_2 X_8 = 0.$$

C'est une surface normale d'Enriques, d'ordre 12, à sections de genre 7, présentant quatre points doubles coniques aux points d'intersection de l'hyperplan et des coniques doubles de V_3^{12}. Ces points doubles sont les points de diramation de la correspondance (1, 2) existant entre la surface et F.

La variété V_3^{12}, dont les sections hyperplanes sont des surfaces d'Enriques, est un cas particulier d'une variété rencontrée par M. Fano [6].

Liége, le 23 mai 1944.

(6) Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno (*Mem. Soc. ital. d. Scienze*, 3e série, t. XXIV, 1938, pp. 1-26).

M. HAYEZ, Impr. de l'Académie royale, 112, rue de Louvain, Bruxelles
(Domicile légal : rue de la Chancellerie, 4)