Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. XI, 1960 BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL UND STUTTGART Fasc. 6

Sur une suite de quadriques

Par LUCIEN GODEAUX à Liége

Sur une suite de quadriques

Par Lucien Godeaux à Liége

Dans nos recherches sur la Géométrie projective différentielle des surfaces, nous avons utilisé systématiquement la suite de Laplace d'un espace à cinq dimensions que l'on obtient en considérant les points de l'hyperquadrique de Klein qui représentent les tangentes aux asymptotiques d'une surface[1]). Nous avons remarqué récemment qu'un certain nombre des propriétés que nous avons établies peuvent s'étendre au cas où l'on considère deux suites de Laplace polaires l'une de l'autre par rapport à l'hyperquadrique de Klein. C'est au dévelopement de cette extension qu'est consacrée la présent note.

Nous commençons par donner une démonstration simple du théorème de Darboux suivant lequel la notion de suite de Laplace se conserve par dualité. Nous nous sommes limité au cas de l'espace à cinq dimensions, mais l'extension à un espace quelconque est immédiate.

Nous considérons ensuite l'hyperquadrique de Klein, une suite de Laplace et sa polaire par rapport à cette hyperquadrique. Cela nous permet d'introduire une suite de quadriques et nous démontrons que deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points caractéristiques pour chacune des quadriques. Cette propriété est l'extension de celle de la suite de quadriques que nous avons attachée à un point d'une surface et dont la première est la quadrique de Lie.

Nous recherchons ensuite dans quelles conditions une quadrique de la suite est réductible.

Enfin, nous considérons le cas où les asymptotiques des nappes communes aux enveloppes de deux quadriques consécutives de la suite correspondent aux caractéristiques des points de la suite de Laplace donnée. Ici aussi, on a une extension des propriétés de l'enveloppe des quadriques de Lie dans le cas de conservation des asymptotiques.

Dans le cours de ce travail, nous indiquons la dérivée d'une fonction φ prise i fois par rapport à u et k fois par rapport à v par la notation φ^{ik}, pour des raisons de simplicité typographique.

---

[1]) Voir par exemple notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Actualités scient. N° 138 (Paris, Hermann, 1934). Voir aussi *Sur une correspondance entre surfaces avec conservation des asymptotiques* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1954, pp. 139—146), *Recherches sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (Rend. del Circolo Mat. Palermo, 1959, pp. 91—101) et différentes notes publiées dans le Bulletin de l'Académie roy. de Belgique.

1. Considérons, dans un espace projectif S_5 à cinq dimensions, une suite de Laplace illimitée

$$\text{(I)} \qquad \ldots, A, A_1, \ldots, A_n, \ldots,$$

où nous supposons que les points dépendent de deux paramètres u, v, chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Soit d'autre part $\Omega(p, q) = 0$ une réciprocité de S_5. Appelons B_n le point commun aux hyperplans homologues des points A_{n-2}, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}. Nous avons donc

$$(1) \qquad \begin{gathered} \Omega(A_{n-2}, B_n) = 0, \quad \Omega(A_{n-1}, B_n) = 0, \quad \Omega(A_n, B_n) = 0, \\ \Omega(A_{n+1}, B_n) = 0, \quad \Omega(A_{n+2}, B_n) = 0. \end{gathered}$$

En dérivant par rapport à u les quatre premières relations, on obtient

$$(2) \qquad \Omega(A_{n-2}, B_n^{10}) = 0, \quad \Omega(A_{n-1}, B_n^{10}) = 0, \quad \Omega(A_n, B_n^{10}) = 0, \quad \Omega(A_{n+1}, B_n^{10}) = 0.$$

En dérivant par rapport à v les quatre dernières des relations (1), on a

$$(3) \qquad \Omega(A_{n-1}, B_n^{01}) = 0, \quad \Omega(A_n, B_n^{01}) = 0, \quad \Omega(A_{n+1}, B_n^{01}) = 0, \quad \Omega(A_{n+2}, B_n^{01}) = 0.$$

Enfin, en dérivant par rapport à v les trois dernières des équations (2) ou par rapport à u les trois premières des équations (3), on obtient

$$\Omega(A_{n-1}, B_n^{11}) = 0, \quad \Omega(A_n, B_n^{11}) = 0, \quad \Omega(A_{n+1}, B_n^{11}) = 0.$$

On en conclut que les points B_n, B_n^{10}, B_n^{01}, B_n^{11} appartiennent au plan homologue du plan $A_{n-1}A_nA_{n+1}$; il existe donc une relation linéaire entre les coordonnées de ces points. En d'autres termes, le point B_n satisfait à une équation de Laplace et décrit un réseau conjugué (u, v).

Soit B_{n-1} l'intersection des hyperplans que Ω fait correspondre aux points A_{n-3}, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n, A_{n+1}. Le point B_{n-1} se trouve sur la droite $B_nB_n^{10}$ homologue de l'espace $A_{n-2}A_{n-1}A_nA_{n+1}$. On démontrerait de même que le point B_{n-1}^{01} se trouve sur la droite $B_{n-1}B_n$. On en conclut que B_{n-1} est le transformé de Laplace de B_n dans le sens des u. On définit de la sorte une seconde suite de Laplace

$$\text{(II)} \qquad \ldots, B, \ldots, B_{n-1}, B_n, \ldots,$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v.

Ainsi se trouve établi le théorème de Darboux suivant lequel la dualité conserve les suites de Laplace.

2. Désignons par Q l'hyperquadrique de Klein, de S_5, représentant les droites d'un espace S_3 et supposons que Ω soit la polarité par rapport à Q.

Considérons deux plans conjugués $A_nA_{n+1}A_{n+2}$, $B_nB_{n+1}B_{n+2}$. En général ils coupent Q suivant des coniques dont les points représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique de S_3 que nous désignerons par Φ_n.

Cherchons à déterminer l'enveloppe des cette quadrique Φ_n lorsque u, v varient.

A la quadrique Φ_n sont associées dans S_5 deux matrices à six lignes et trois colonnes formées avec les coordonnées des points considérés

$$|A_n \quad A_{n+1} \quad A_{n+2}|, \qquad |B_n \quad B_{n+1} \quad B_{n+2}|.$$

En dérivant la première matrice par rapport à u, on obtient une combinaison linéaire de cette matrice et de la matrice

$$|A_n \ A_{n+1} \ A_{n+3}|.$$

Cette dernière représente le plan $A_n A_{n+1} A_{n+3}$ dont le conjugué par rapport à Q passe par la droite $B_n B_{n+1}$. Ces deux plans conjugués représentent une quadrique $\Phi_n^{(u)}$ passant par la courbe caracteristique de Φ_n quand u varie.

Appelons C_n, C_n' les points de rencontre de $B_n B_{n+1}$ avec Q, par D_n, D_n' ceux de $A_n A_{n+1}$ avec Q, par C_{n+1}, C_{n+1}' ceux de $B_{n+1} B_{n+2}$, enfin par D_{n+1}, D_{n+1}' ceux de $A_{n+1} A_{n+2}$ avec Q. Soient $c_n, c_n', d_n, d_n', c_{n+1}, c_{n+1}', d_{n+1}, d_{n+1}'$ les droites correspondantes dans S_3.

La quadrique $\Phi_n^{(u)}$ passe par les droites $d_n, d_n', c_{n+1}, c_{n+1}'$ qui forment un quadrilatère gauche appartenant à Φ_n, caractéristique pour cette quadrique lorsque u varie.

On peut arriver au même résultat en partant de la seconde matrice. On trouve alors que la courbe caractéristique de Φ_n quand u varie est découpée sur cette quadrique par celle qui est représentée par le plan $B_{n-1} B_{n+1} B_{n+2}$, dont le plan conjugué passe par la droite $A_n A_{n+1}$. On retrouve les mêmes droites caractéristiques.

On démontre de même que la caractéristique de Φ_n quand v varie est formée par les droites $c_n, c_n', d_{n+1}, d_{n+1}'$.

On en conclut que lorsque u, v varient, les points caractéristiques de Φ_n sont

$$(c_n, d_n), (c_n, d_n'), (c_n', d_n), (c_n', d_n')$$

et

$$(c_{n+1}, d_{n+1}), (c_{n+1}, d_{n+1}'), (c_{n+1}', d_{n+1}), (c_{n+1}', d_{n+1}').$$

On voit d'ailleurs que les quatre premiers points sont aussi caractéristiques pour la quadrique Φ_{n-1} et les quatre derniers pour la quadrique Φ_{n+1}.

On a ainsi *une suite de quadriques*

$$\ldots, \Phi, \Phi_1, \ldots, \Phi_n, \Phi_{n+1}, \ldots,$$

telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points caractéristiques pour les deux quadriques.

3. Nous nous proposons maintenant le problème suivant: La quadrique Φ_{n-1} étant supposée irréductible, dans quelles conditions la quadrique Φ_n est-elle réductible ?

Occupons-nous en premier lieu de deux cas simples.

Supposons tout d'abord que la droite $A_n A_{n+1}$ soit tangente à l'hyperquadrique Q, c'est-à-dire que les points D_n, D_n' soient confondus. Alors le point D_n décrit une surface tracée sur Q à laquelle la droite $A_n A_{n+1}$ est tangente, donc le point D_n doit coïncider avec un des foyers de la congruence $(A_n A_{n+1})$, c'est-à-dire avec A_n où A_{n+1}.

Si A_n appartient à Q, le plan $A_{n-1} A_n A_{n+1}$ touche Q en A_n et coupe l'hyperquadrique suivant une conique dégénérée. La quadrique Φ_{n-1} serrait alors réductible, contrairement à l'hypothèse. C'est donc le point A_{n+1} qui coïncide avec D_n et appartient à Q.

Nous supposerons en premier lieu que le point B_{n+1} n'appartient pas à Q.

Le point A_{n+1} appartenant à Q et satisfaisant à une équation de Laplace, est l'image d'une droite a_{n+1} décrivant une congruence W. Soient y_1, y_2 les foyers et

η_1, η_2 les plans focaux de cette droite. Le plan $A_n A_{n+1} A_{n+2}$ touchant Q en A_{n+1} coupe cette hyperquadriques suivant deux droites passant par A_{n+1}. Ces droites représentent les faisceaux de rayons (y_1, η_1), (y_2, η_2).

Le plan $B_n B_{n+1} B_{n+2}$ doit couper Q suivant deux droites qui représentent deux faisceaux de rayons dont les plans sont certainement η_1, η_2, donc le point commun à ces deux droites doit représenter la droite a_{n+1} commune aux plans η_1, η_2. On voit donc que les deux droites se coupent au point A_{n+1}. Les deux droites passent l'une par les points C_n, C_{n+1}, l'autre par les points C'_n, C'_{n+1}.

Les sommets des faisceaux de rayons représentés par les droites $A_{n+1} C_n$, $A_{n+1} C'_n$ sont des points caractéristiques communs aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n. On en conclut que ces points sont y_1, y_2. Les faisceaux de rayons sont respectivement (y_1, η_2), (y_2, η_1). Le plan η_2 est tangent à la surface (y_1) et le plan η_1 à la surface (y_2).

Observons que la quadrique Φ_{n+1} est en général irréductible, mais touche également les surfaces (y_1), (y_2).

Supposons maintenant que le point B_{n+1} appartienne à Q.

La droite $A_{n+1} B_{n+1}$ appartient à Q et représente un faisceau de rayons (y, η). La quadrique Φ_n se réduit au plan η compté deux fois et la quadrique Φ_{n-1} touche la surface (y), le point y étant un point caractéristique à compter quatre fois.

Le plan $A_n A_{n+1} A_{n+2}$ touche Q le long de la droite $A_{n+1} B_{n+1}$, par conséquent la droite a_{n+1} homologue de A_{n+1} décrit une congruence W n'ayant qu'une seule surface focale (y). La droite a_{n+1} est donc une tangente asymptotique de la surface (y). Il en est de même de la droite b_{n+1} représentée par le point B_{n+1}. On en conclut que les quadriques Φ_{n-1} sont les quadriques de LIE de la surface (y). Le point A_{n+2} coïncide avec B_{n+1} et le point B_{n+2} avec A_{n+1}.

Les suites (I) et (II) coïncident à l'ordre près.

4. Nous supposerons maintenant que les points A_{n+1}, B_{n+1} n'appartienent pas à Q; les points C_n, C'_n, D_n, D'_n sont donc distincts.

Appelons respectivement $p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}$ les points communs aux droites c_n et d_n, c_n et d'_n, c'_n et d_n, c'_n et d'_n. Ces points sont les sommets d'un tétraèdre dont nous désignerons par ω_{11}, ω_{12}, ω_{21}, ω_{22} les faces opposées.

A la droite $C_n D_n$ correspond le faisceau de rayons (p_{11}, ω_{22}), à $C_n D'_n$ le faisceau (p_{12}, ω_{21}), à $C'_n D_n$ le faisceau (p_{21}, ω_{12}), enfin à la droite $C'_n D'_n$ le faisceau de rayons (p_{22}, ω_{11}).

La quadrique Φ_n ne peut être un cône, car ce cône devrait toucher les plans ω_{22}, ω_{21}, ω_{12}, ω_{11} respectivement en p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}, ce qui est impossible. La quadrique Φ_n dégénère donc en deux plans se coupant suivant une droite m. Le point M de Q représentant cette droite est commun aux plans $A_n A_{n+1} A_{n+2}$, $B_n B_{n+1} B_{n+2}$.

La quadrique Φ_n doit passer par les points p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} et y toucher respectivement les plans ω_{22}, ω_{21}, ω_{12}, ω_{11}, donc la droite m est une des diagonales du quadrilatère gauche $p_{11}p_{12}p_{21}p_{22}$, par exemple la droite $p_{11}p_{22}$. Les plans formant la quadrique sont alors ω_{12}, ω_{21}.

Déterminons la position du point M.

Aux points C_n, C'_n menons les tangentes aux courbes u. Elles sont situées dans le plan $B_{n-1} B_n B_{n+1}$ et se coupent en un point X. L'hyperplan polaire de X passe par le plan $A_{n-1} A_n A_{n+1}$ conjugué de $B_{n-1} B_n B_{n+1}$ et par les points C_n, C'_n, les tangentes aux courbes u en ces points touchant Q. Par suite, l'hyperplan polaire de X passe par les points B_n, B_{n+1}.

On démontre de même que si Y est le point du plan $A_{n-1}A_nA_{n+1}$ commun aux tangentes aux courbes v aux points D_n, D'_n, l'hyperplan polaire de ce point contient les points B_{n-1}, B_n, B_{n+1}, A_n, A_{n+1}. Il en résulte que l'espace conjugué de la droite XY est $A_nA_{n+1}B_nB_{n+1}$. Le point M est un des points d'intersection de la droite XY avec Q, car ce point est conjugué de A_n, A_{n+1}, B_n, B_{n+1}, donc m rencontre les droites c_n, c'_n, d_n, d'_n [2]).

La droite D_nM coupe Q en M et touche cette hyperquadrique en D_n, donc cette droite appartient à Q. Elle coupe la droite $A_{n+1}A_{n+2}$ en un point appartenant à Q, par exemple au point D_{n+1}. De même la droite D'_nM appartient à Q et passe par le point D'_{n+1}. Les droites CM, $C'M$ appartiennent à Q et passent la première par C_{n+1}, la seconde par C'_{n+1}.

La droite D_nM représente le faisceau de droites (p_{11}, ω_{12}), la droite D'_nM le faisceau de droites (p_{22}, ω_{21}), la droite C_nM le faisceau de droites (p_{11}, ω_{21}) et la droite C_nM le faisceau de droites (p_{11}, ω_{21}).

Les droites d_{n+1}, d'_{n+1}, c_{n+1}, c'_{n+1} appartiennent respectivement aux faisceaux précédents. On en conclut que la quadrique Φ_{n+1} passe par les points p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}. En p_{12}, p_{21}, elle touche respectivement les plans ω_{21}, ω_{12}, mais aux points p_{11}, p_{22}, elle touche les plans (c_{n+1}, d_{n+1}), (c'_{n+1}, d'_{n+1}) distincts des plans ω_{22}, ω_{11} que touche Φ_{n-1}.

Le point p_{11} est caractéristique pour les quadriques Φ_{n-1}, Φ_{n+1} mais celles-ci ont en ce point des plans tangents distincts, alors qu'ils devraient être confondus. Il faut donc que le point p_{11} soit double pour la surface (p_{11}). La surface (p_{11}) doit donc être une surface comptée deux fois. Il en est de même de la surface (p_{22}).

5. Revenons au cas général où la quadrique Φ_n est en général irréductible et proposons-nous de voir quand la surface (p_{11}) par exemple a pour asymptotiques les courbes u, v.

Supposons en premier lieu que la surface (p_{11}) ait pour asymptotiques les courbes u, v. Désignons par U, V les points de la droite C_nD_n représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en un point p_{11} de (p_{11}). On sait que le point U est le transformé de Laplace de V dans le sens des v et V celui de U dans le sens des u. Soient V_1 le transformé de Laplace de V dans le sens des u et U_1 celui de U dans le sens des v.

Nous allons démontrer que le point C_n décrit un réseau conjugué aux congruences (B_nB_{n+1}), (UV).

La tangente à la courbe u en C_n est l'intersection des plans UVV_1 et $B_{n+1}B_nB_{n-1}$. Supposons que les droites VV_1 et B_nB_{n-1} ne se rencontrent pas et soient R, S les points de rencontre de la tangente respectivement avec VV_1 et B_nB_{n-1}. Faisons varier v et supposons que la droite RS n'engendre pas une développable. Les tangentes aux courbes v en R, S rencontrent respectivement UV en R' et B_nB_{n+1} en S', ces points R', S' étant distincts de C_n. Ces tangentes déterminent un espace à trois dimensions S_3 contenant les plans $B_{n-1}B_nB_{n+1}$ et UVV_1. Cet espace est tangent le

[2]) On pourrait démontrer de même que le point X' commun aux tangentes aux courbes u en D_n, D'_n et le point Y' commun aux tangentes aux courbes v en C_n, C'_n appartiennent à la droite XY.

long de RS à la variété (RS), quand v varie. La tangente à la courbe v en C_n appartient à cet espace S_3, elle rencontre la droite $B_{n+1}B_{n+2}$, donc le point B_{n+2} appartient aussi à S_3. La tangente à la courbe v en C_n appartient aussi au plan $V\,U\,U_1$; elle rencontre donc la droite $U\,U_1$ et par suite le point U_1 appartient aussi à l'espace S_3 considéré.

On sait que la suite de Laplace à laquelle appartiennent U, V est autopolaire par rapport à Q. Cela étant, les droites conjuguées des espaces $B_{n-1}B_nB_{n+1}B_{n+2}$ et $U_1\,U\,V\,V_1$ sont respectivement A_nA_{n+1} et $U\,V$. Puisque les deux espaces coïncident, ces deux droites devraient coïncider, ce qui est absurde. On en conclut que lorsque v varie, la droite RS engendre une développable, ce qui implique que les points R', S' coïncident avec C_n et les points R, S en un point commun aux droites $B_{n-1}B_n$ et $V\,V_1$. La tangente en ce point à la ligne v passant par C_n, ce dernier est le transformé de Laplace du premier dans le sens des v. Par conséquent, C_n décrit un réseau conjugué (u, v).

Puisque C_n décrit un réseau conjugué, la droite c_n décrit une congruence W et les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes focales (p_{11}), (p_{12}), donc les asymptotiques de la surface (p_{12}) sont les courbes u, v. Mais alors, le point D_n décrit un réseau conjugué (u, v). Il en résulte que la droite d_n' décrit une congruence W et les asymptotiques des surfaces (p_{21}), (p_{22}) sont aussi les courbes u, v.

Inversement, si l'un des points C_n, C_n', D_n, D_n' décrit un réseau conjugué (u, v), les quatre nappes communes aux enveloppes des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n ont pour asymptotiques les courbes u, v.

6. Supposons que les asymptotiques des surfaces (p_{11}), (p_{12}), (p_{21}), (p_{22}) soient le courbes u, v. Rappelons que nous avons appelé X le point commun aux droites $C_nC_n^{10}$, $C_n'C_n'^{10}$, Y le point commun aux droites $D_nD_n^{01}$, $D_n'D_n'^{01}$, X' le point commun aux droites $D_nD_n^{10}$, $D_nD_n'^{10}$, enfin Y' le point commun aux droites $C_nC_n^{01}$, $C_n'C_n'^{01}$.

Observons que les droites $C_nC_n^{10}$, $D_nD_n^{10}$ sont dans le plan $U\,V\,V_1$. Si nous désignons par U', V' les points de la droite C_nD_n' qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (p_{12}) et par V_1' le transformé de Laplace de V' dans le sens des u, les droites $C_nC_n^{10}$, $D_n'D_n'^{10}$ sont dans le plan $U'\,V'\,V_1'$. Les plans $U\,V\,V_1$, $U'\,V'\,V_1'$ ont en commun la droite $C_nC_n^{10}$ et d'autre part les droites $D_nD_n^{10}$, $D_n'D_n'^{10}$ se coupent en un point X', donc le point X' se trouve sur la droite $C_nC_n^{10}$.

En considérant les surfaces (p_{21}), (p_{22}), on démontrerait de même que le point X' se trouve sur la droite $C_n'C_n'^{10}$. Celle-ci coupe la droite $C_nC_n^{10}$ en un point X et par conséquent les points X, X' coïncident.

De même, les points Y, Y' coïncident.

Les plans tangents en C_n, C_n' aux surfaces (C_n), (C_n') passent par la droite $X\,Y$. Observons que ces plans coïncident avec les plans osculateurs aux courbes v aux transformés de Laplace de C_n, C_n' dans le sens des u (points qui se trouvent sur la droite B_nB_{n-1}). Par conséquent, la tangente en X à la courbe v coïncide avec la droite $X\,Y$.

On démontrerait de même que la tangente en Y à la ligne u coïncide avec la droite $Y\,X$. Par conséquent, les points X, Y sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Les points X, Y déterminent une suite de Laplace inscrite dans les polyèdres à faces planes associés aux suites (I) et (II).

Observons pour terminer que les points C_n, C_n' appartiennent à des suites de Laplace inscrites dans la suite (II), les points D_n, D_n' à des suites de Laplace inscrites dans la suite (I). Les polaires des deux premières suites sont circonscrites à la suite (I) et celles des deux dernières suites à la suite (II).

Eingegangen am 4. 8. 1960