Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 31e année, nº 5-6 1962, pp. 312-316

CONSTRUCTION D'UNE SURFACE POSSÉDANT UNE SEULE COURBE CANONIQUE DE GENRE TROIS

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de la Société

L'objet de cette courte note est la construction d'une surface régulière possédant une seule courbe canonique de genre trois $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 3$. Nous l'obtenons comme image d'une involution cyclique du quatrième ordre appartenant à une surface régulière de genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$. La surface se présente sous forme d'un cône du second ordre quadruple non cyclique.

1. Considérons dans un espace linéaire S_4 à quatre dimensions l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & -x_2 & ix_3 & -ix_4 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

de période quatre, dont le carré est

$$\mathrm{H}^2 - \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Considérons également la surface F intersection de l'hypersurface du quatrième ordre

$$a_0x_0^4 + x_0^2[\varphi_2(x_1, x_2) + a_1x_3x_4] + \varphi_4(x_1, x_2) + x_3x_4\varphi'_2(x_1, x_2) + \psi_2(x_3^2, x_4^2) + x_0x_3^2\varphi_1(x_1, x_2) + x_0x_4^2\varphi'_4(x_1,x_2) = 0. \qquad (1)$$

où les φ, ψ sont des formes algébriques dont le degré est indiqué par l'indice, et l'hyperquadrique

$$b_{00}x_0^2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{34}x_3x_4 = 0. \qquad (2)$$

La surface F est une surface projectivement canonique, c'est-à-

Manuscrit reçu le 15 février 1962.

dire une surface dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes. Elle a donc les genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$, $P_2 = 14, \ldots$.

La surface F est transformée en soi par l'homographie H.

Les axes ponctuels de l'homographie H sont les sommets O_0, O_3, O_4 de la figure de référence et la droite O_1O_2 qui joint les deux autres sommets. Sur la surface F, elle détermine une involution I_4 d'ordre quatre.

Les axes ponctuels de l'homographie harmonique H^2 sont le plan $O_0O_1O_2$ et la droite O_3O_4. Sur F cette homographie détermine une involution I_2 d'ordre deux possédant huit points unis situés dans le plan $O_0O_1O_2$. Ce sont les points

$$a_0x_0^4 + x_0^2\varphi_2(x_1, x_2) + \varphi_4(x_1, x_2) = 0,$$

$$b_{00}x_0^2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{12}x_1x_2 = 0,\ x_3 = x_4 = 0.$$

L'involution I_4 ne possède pas de point uni quadruple, mais possède les huit points unis doubles précédents, formant quatre groupes de l'involution.

2. Nous commencerons par construire une surface F' représentant l'involution I_2. Dans ce but, considérons les hyperquadriques

$$\lambda_{00}x_0^2 + \lambda_{11}x_1^2 + \lambda_{22}x_2^2 + \lambda_{01}x_0x_1 + \lambda_{02}x_0x_2 + \lambda_{12}x_1x_2 + \lambda_{33}x_3^2 + \\ + \lambda_{44}x_4^2 + \lambda_{34}x_3x_4 = 0,$$

qui forment le système le plus ample dont l'équation se reproduit exactement lorsque l'on effectue H^2. Rapportons les aux hyperplans d'un espace linéaire S_8 à huit dimensions en posant

$$\rho X_{ik} = x_ix_k,\ (i, k = 0, 1, 2 \text{ ou } i, k = 3,4).$$

Nous obtenons les équations de la surface F'.

$$\begin{vmatrix} X_{00} & X_{01} & X_{02} \\ X_{01} & X_{11} & X_{12} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(caractéristique un)} \tag{3}$$

$$X_{33}\,X_{44} - X_{34}^2 = 0, \tag{4}$$

$$b_{00}\,X_{00} + b_{11}\,X_{11} + b_{22}\,X_{22} + b_{12}\,X_{12} + b_{34}\,X_{34} = 0 \tag{5}$$

et la transformée de la variété (1) que nous écrirons sous la forme

$$\begin{aligned} &a_0X_{00}^2 + X_{00}(a_{00}X_{11} + a_{01}X_{22} + a_{02}X_{12} + a_{03}X_{34}) \\ &+ a_{10}X_{11}^2 + a_{11}X_{11}X_{12} + a_{12}X_{12}^2 + a_{13}X_{12}X_{22} + a_{14}X_{22}^2 \\ &+ X_{34}(a_{20}X_{11} + a_{21}X_{12} + a_{22}X_{22}) + a_{30}X_{33}^2 + a_{31}X_{34}^2 + a_{32}X_{44}^2 \\ &+ X_{33}(a_{40}X_{01} + a_{41}X_{02}) + X_{44}(a_{00}X_{01} + a_{51}X_{02}) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Dans l'espace S_5 d'équations $X_{33} = X_{44} = X_{34} = 0$, les équations (3) représentent une surface de Veronese Φ et dans S_8, une variété V_5^4 projetant cette surface à partir du plan S_2 d'équations $X_{00} = X_{01} = \ldots = X_{22} = 0$.

Dans ce plan S_2, l'équation (4) représente une conique φ et dans S_8, le cône V_7^2 projetant cette conique de l'espace S_5.

L'équation (5) représente un hyperplan S_7 et l'équation (6) une hyperquadrique V_7^2. La surface F' appartient à l'hyperplan (5) et est d'ordre 16.

Aux huit points unis de l'involution I_2 correspondant sur F' huit points doubles coniques donnés par les équations (3), (5), (6) où l'on fait $X_{33} = X_{44} = X_{34} = 0$. Ces points appartiennent à la surface de Veronese Φ et le cône tangent en chacun d'eux est la projection de la conique φ.

Les courbes canoniques de la surface F' correspondent aux courbes canoniques de la surface F découpées par les hyperplans passant par la droite $0_3 0_4$. Soit

$$\mu_0 x_0 + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 = 0$$

l'équation d'un de ces hyperplans. De cette équation, on déduit

$$\mu_0 X_{00} + \mu_1 X_{01} + \mu_2 X_{02} = 0, \quad \mu_0 X_{01} + \mu_1 X_{11} + \mu_2 X_{12} = 0,$$
$$\mu_0 X_{02} + \mu_1 X_{12} + \mu_2 X_{22} = 0.$$

Ces équations représentent dans l'espace S_5 une conique γ tracée sur la surface Φ et dans l'espace S_8, le cône V_4^2 projetant γ du plan S_2. On en conclut qu'une courbe canonique de la surface F' est obtenue comme intersection d'un cône V_4^2 projetant du plan S_2 une conique γ de la surface de Veronese Φ, des hypersurfaces (4), (6) et de l'hyperplan (5).

Observons en passant que le plan de γ et S_2 déterminent un espace linéaire à cinq dimensions S_5'. Dans cet espace S_5', les trois premières des variétés précédentes, qui sont des hyperquadriques, ont en commun une surface de genres $p_a = P_4 = 1$. On sait que les sections hyperplanes d'une telle surface et en particulier la section par l'hyperplan (5), sont des courbes de genre cinq. Le genre linéaire de la surface F' est donc égal à cinq.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de F', nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.8,$$

d'où $p'_a = 3$, comme cela résulte du fait qui vient d'être établi que les courbes canoniques de F' forment un réseau.

Entre le genre linéaire $p^{(1)} = 9$ de F et celui $p'^{(1)}$ de F', nous avons la relation

$$p^{(1)} - 1 = 2\,p'^{(1)} - 1),$$

d'où $p'^{(1)} = 5$, comme on vient de le voir.

3. A l'involution I_4 appartenant à F correspond sur F' une involution du second ordre I'_2 engendrée par l'homographie

$$H' = \begin{pmatrix} X_{00} & X_{11} & X_{22} & -X_{01} & -X_{02} & X_{12} & -X_{33} & -X_{44} & X_{34} \\ X_{00} & X_{11} & X_{22} & X_{01} & X_{02} & X_{12} & X_{33} & X_{44} & X_{34} \end{pmatrix}.$$

Cette homographie possède comme axes ponctuels un espace à quatre dimensions

$$X_{01} = X_{02} = X_{33} = X_{44} = 0 \tag{7}$$

et un espace à trois dimensions

$$X_{00} = X_{11} = X_{22} = X_{12} = X_{34} = 0. \tag{8}$$

On voit immédiatement que ces axes ne rencontrent pas la surface F' et que par conséquent l'involution I'_2 sur F' est dépourvue de ponts unis.

On en déduit que le genre arithmétique de la surface F'' image de l'involution I'_2 est $p''_a = 1$. Le genre linéaire de F'' est $p''^{(1)} = 3$. La surface F'' possède donc une seule courbe canonique de genre trois.

La surface F'' est aussi l'image de l'involution I_4 appartenant à F et la courbe canonique de F'' correspond à la courbe canonique de F découpée par l'hyperplan $x_0 = 0$ et par conséquent à la courbe canonique de F' située sur le cône

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0, \quad X_{00} = X_{01} = X_{02} = 0.$$

Elle est l'intersection de ce cône avec les hyperquadriques

$$X_{33}X_{44} - X_{34}^2 = 0.$$

$$a_{10}X_{11}^2 + a_{11}X_{11}X_{12} + a_{12}X_{12}^2 + a_{13}X_{12}X_{22} + a_{14}X_{22}^2$$
$$+ X_{34}(a_{30}X_{11} + a_{21}X_{12} + a_{22}X_{22}) + a_{30}X_{33}^2 + a_{31}X_{34}^2 + a_{32}X_{44}^2 = 0$$

et avec l'hyperplan

$$b_{11}X_{11} + b_{22}X_{22} + b_{12}X_{12} + b_{34}X_{34} = 0.$$

Pour obtenir les équations de la surface F'', il suffit de projeter F' de l'espace (8) sur l'espace à quatre dimensions (7), c'est-à-dire d'éliminer X_{01}, X_{02}, X_{33}, X_{44} entre les équations de la surface F'.

Écrivons l'équation de la variété (6) sous la forme

$$\psi + a_{30}X_{33}^2 + a_{32}X_{44}^2 + X_{33}(a_{40}X_{01} + a_{41}X_{02}) + X_{44}(a_{50}X_{01} + a_{51}X_{02}) = 0$$

et posons

$$(a_{40}X_{01} + a_{41}X_{02})^2 = X_{00}\alpha_1(X_{11}, X_{22}, X_{12}),$$
$$(a_{50}X_{04} + a_{51}X_{02})^2 = X_{00}\beta_1(X_{11}, X_{22}, X_{12}).$$
$$(a_{40}X_{01} + a_{41}X_{02})\,(a_{50}X_{01} + a_{51}X_{02}) = X_{00}\gamma_1(X_{11}, X_{22}, X_{12}),$$

α_1, β, γ_1 étant des formes algébriques linéaires.

Posons ensuite $z = X_{33}^2$. Nous obtenons

$$\left.\begin{array}{l} a_{30}^2 z^4 + z^3(2a_{30}\psi - X_{00}\alpha_1) + z^2(2a_{30}a_{32}X_{34}^4 + \psi^2 - 2X_{20}X_{34}^2\gamma_1) \\ \quad + z(2a_{32}\psi X_{34}^4 - X_{00}\alpha_{34}^4\beta_1) + a_{32}^2X_{34}^8 = 0, \end{array}\right\} \quad (9)$$

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = 0, \qquad (19)$$

$$b_{00}X_{00} + b_{11}X_{11} + b_{22}X_{22} + b_{12}X_{12} + b_{34}X_{34} = 0. \qquad (5)$$

L'hyperplan (5), qui est actuellement un espace à trois dimensions, coupe le cône (10) suivant un cône quadratique et par l'équation (9), on obtient la surface F'' comme cône du second ordre multiple (non cyclique) d'ordre quatre.

Ainsi se trouve démontrée l'existence de surfaces de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 3$.

Liège, le 9 février 1962.