Bull. Soc. Royale Sciences Liège, 31e année, n° 11-12 1962, pp. 751-756

UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE A TROIS DIMENSIONS DONT LES SECTIONS HYPERPLANES SONT DES SURFACES DE BIGENRE UN

par Lucien GODEAUX,
Membre de la Société

Dans un travail antérieur (1), nous avons établi le théorème suivant :

Toute variété algébrique normale, à trois dimensions, non conique, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$) *contient un système linéaire de surfaces de genres un* ($p_a = P_4 = 1$) *dont la dimension, augmentée d'une unité, est égale à la dimension de l'espace ambiant.*

Nous avions auparavant obtenu un exemple d'une telle variété, d'ordre seize, dans un espace linéaire S_9 à neuf dimensions, comme image des couples de points inverses de l'espace. Cette variété possède huit points quadruples coniques et trois points doubles coniques (2). En projetant cette variété des trois points doubles sur une espace à six dimensions, on obtient dans cet espace une variété à trois dimensions, d'ordre dix, possédant également huit points quadruples coniques, ayant également la propriété indiquée.

G. Fano a repris plus tard la même question et après avoir confirmé nos résultats, a déterminé toutes les variétés possédant la propriété indiquée (3).

Des recherches récentes nous ont conduit incidemment à la

(1) *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1933, pp. 134-140).

(2) *Sur une variété algébrique représentant les couples de points inverses de l'espace et sur les surfaces du quatrième ordre ayant quatre points doubles uniplanaires* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1930, pp. 907-922).

(3) G. Fano, *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno* (Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1938, pp. 1-26).

construction d'une variété répondant à la question et dont les équations sont particulièrement simples ([1]). Il nous a paru pour cette raison intéressant d'y consacrer cette courte note.

Dans un espace linéaire S_{11} à onze dimensions, nous considérons deux espaces linéaires Σ_1, Σ_2 à cinq dimensions ne se rencontrant pas et dans chacun de ces espaces, une surface de Veronese, Φ_1 dans Σ_1 et Φ_2 dans Σ_2. La variété W_5^{16} à cinq dimensions, d'ordre seize, lieu des droites s'appuyant sur les surfaces Φ_1, Φ_2 possède ces surfaces comme surfaces quadruples. Les sections de W_5^{16} par les espaces linéaires à neuf dimensions sont des variétés V_3^{16} dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un, dépourvues de courbe canonique et possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro.

1. Considérons dans un espace linéaire S_5 à cinq dimensions deux plans σ_1, σ_2 ne se rencontrant pas et d'autre part, dans un espace linéaire S_{11} à onze dimensions deux espaces linéaires à cinq dimensions Σ_1, Σ_2 ne se rencontrant pas. En rapportant projectivement les coniques de σ_1 aux hyperplans de Σ_1 on obtient dans cet espace une surface de Veronese Φ_1, du quatrième ordre et en rapportant de même les coniques de σ_2 aux hyperplans de Σ_2, on obtient une surface de Veronese Φ_2.

Les droites de S_{11} s'appuyant sur Φ_1, Φ_2 forment une variété W_5^{16}, de dimension cinq et d'ordre seize, ayant Φ_1, Φ_2 comme surfaces quadruples. A une droite g de cette variété correspond une droite g' de S_5 s'appuyant sur les plans σ_1, σ_2 et réciproquement ([2]).

Désignons par $y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2$ les coordonnées des points de S_5 et supposons que le plan σ_1 ait pour équations $z_0 = z_1 = z_2 = 0$, celles du plan σ_2 étant $y_0 = y_1 = y_2 = 0$.

Posons

$$Y_{ik} = y_i y_k, \quad Z_{ik} = z_i z_k, \quad (i, k = 0, 1, 2),$$

avec les conditions $Y_{ik} = Y_{ki}$, $Z_{ik} = Z_{ki}$.

Les équations de la surface Φ_1 s'obtiendront en écrivant que la matrice (Y_{ik}) est de caractéristique un, jointes à $Z_{ik} = 0$. De même, les équations de la surface Φ_2 s'obtiendront en écrivant que la matrice (Z_{ik}) est de caractéristique un et que l'on a $Y_{ik} = 0$.

([1]) *Une famille de surfaces algébriques de diviseur deux* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1959, pp. 373-380).

([2]) *Une famille...* (loc. cit.).

Dans ces conditions, les équations de la variété W_5^{16} seront obtenues en écrivant que les déterminants

$$\begin{vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} \\ Y_{01} & Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{02} & Y_{12} & Y_{22} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{01} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{02} & Z_{12} & Z_{22} \end{vmatrix} = 0$$

sont de caractéristique un.

2. Considérons, dans l'espace S_5, la variété V_3' à trois dimensions et du quatrième ordre, représentée par les équations

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a_{ik} y_i y_k + \Sigma b_{ik} z_i z_k = 0, \\ \Sigma a'_{ik} y_i y_k + \Sigma b'_{ik} z_i z_k = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i, k = 0, 1, 2) \tag{1}$$

Cette variété est transformée en soi par l'homographie biaxiale harmonique

$$H = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & -z_0 & -z_1 & -z_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 & z_0 & z_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

dont les axes sont les plans σ_1, σ_2.

Soit I l'involution du second ordre engendrée sur la variété V_3'.

Cette involution possède huit points unis : quatre dans chacun des plans σ_1, σ_2.

Deux points P_1, P_2 de V_3' formant un couple de l'involution I sont situés sur une droite g' s'appuyant sur les plans σ_1, σ_2. Par conséquent à ce couple correspond un point P situé sur la droite g homologue de g'. On en déduit qu'une image de l'involution I est la section de la variété W_5^{16} par les hyperplans

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a_{ik} y_{ik} + \Sigma b_{ik} z_{ik} = 0, \\ \Sigma a'_{ik} y_{ik} + \Sigma b'_{ik} z_{ik} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i, k = 0, 1, 2).$$

C'est donc une variété V_3^{16} à trois dimensions, d'ordre seize. Elle appartient à un espace linéaire S_9 à neuf dimensions et présente quatre points quadruples situés sur la surface Φ_1 et quatre points quadruples situés sur la surface Φ_2. Ces points correspondent aux points unis de l'involution I. En chacun de ces points, par exemple en un point situé sur Φ_1, le cône tangent est la section par S_9 du cône projetant du point la surface Φ_2. Les huit points quadruples de la variété V_3^{16} sont donc des points coniques.

3. Les hyperquadriques de S_5 transformées en elles-mêmes par l'homographie H forment deux systèmes linéaires d'équations

$$\begin{aligned} &\Sigma \lambda_{ik} y_i y_k + \Sigma \mu_{ik} z_i z_k = 0 \qquad (2) \\ &\Sigma \lambda_{ik} y_i z_k = 0 \qquad\qquad\qquad\quad\; (3) \end{aligned} \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

Les hyperquadriques (2) ne passent pas par les points unis de l'involution I ; il leur correspond dans S_{11} les hyperplans

$$\Sigma\lambda_{ik}Y_{ik} + \Sigma\mu_{ik}Z_{ik} = 0.$$

Elles découpent sur la variété V'_3 un système linéaire de surfaces $|F'_0|$ du huitième ordre de dimension neuf, qui correspond projectivement aux sections hyperplanes de la variété V_3^{16}.

Considérons la surface F'_0 section de V'_3 par une hyperquadrique (2). C'est une surface du huitième ordre, intersection de trois hyperquadriques et par suite tous ses genres sont égaux à l'unité et ses courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$). Sur F'_0, l'homographie H engendre une involution du second ordre privée de points unis et par conséquent la surface qui représente cette involution sur V_3^{16} est une surface F_0 privée de courbe canonique et ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$). (1)

Les sections hyperplanes de la variété V_3^{16} *sont des surfaces* F_0 *dépourvues de courbe canonique et ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro.*

Considérons maintenant la surface F'_1 intersection de la variété V'_3 avec une hyperquadrique (3). Observons que cette hyperquadrique contient les plans σ_1, σ_2 et que par conséquent l'homographie H détermine sur F'_1 une involution du second ordre présentant huit points unis. La surface F'_1 est également de genres un ($p_a{=}P_4{=}1$), par conséquent la surface F_1 qui représente l'involution qu'elle contient sur V_3^{16} est de genres un ($p_a = P_4 = 1$) (2). La surface F_1 possède huit points doubles coniques, coïncident avec les points quadruples de V_3^{16}. Le cône tangent à F_1 en un de ces points, par exemple en un point situé sur Φ_1, est le section par S_9 du cône projetant de ce point une conique de la surface Φ_3.

Pour obtenir l'équation de la variété découpant sur V_2^{16} la surface F_1, élevons l'équation (3) au carré. Nous en déduisons

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}Y_{ij}Z_{kh} = 0.$$

C'est une hyperquadrique de S_{11} qui passe par les espaces Σ_1, Σ_2. D'après la théorie des involutions cycliques présentant un nombre

(1) Voir par exemple notre exposé : *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls.* Actualités scient., N° 123 (Paris, Hermann, 1934).

(2) Voir par exemple notre exposé : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Actualités scient., N° 270 (Paris, Hermann, 1935).

fini de points unis, cette hyperquadrique touche la variété W_5^{16} le long d'une surface du seizième ordre, donc elle touche la variété V_3^{16} le long de la surface F_1. Cette surface appartient à un système linéaire à huit dimensions.

Chacun des points multiples de V_3^{16} est équivalent, au point du vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les surfaces rationnelles équivalentes aux points quadruples situés sur Φ_1 et par $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ celles qui sont équivalentes aux points quadruples situés dans Φ_2.

D'après la théorie des involutions cycliques, on a

$$2\,F_0 \equiv 2\,F_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4.$$

Il existe ∞^8 *hyperquadriques touchant la variété* V_3^{16} *suivant des surfaces* F_1 *d'ordre* 16 *et de genres un* ($p_a = P_4 = 1$).

4. Considérons maintenant une surface G_1' section de la variété V_3' par un hyperplan passant par le plan σ_1, d'équation

$$\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 = 0.$$

G_1' est une surface du quatrième ordre située dans un espace à quatre dimensions, intersection de deux hyperquadriques, donc elle est rationnelle. Sur cette surface, l'homographie H détermine une involution du second ordre ayant quatre points unis dans σ_1. L'image de cette involution sur V_3^{16} est une surface rationnelle G_1, du huitième ordre, ayant quatre points doubles coniques aux points quadruples de V_3^{16} situés dans Σ_1. Elle est située dans l'hyperplan

$$\Sigma \mu_i \mu_k Z_{ik} = 0 \tag{4}$$

passant par Σ_1.

En considérant la surface G_2' découpée sur V_3' par l'hyperplan

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1 y_2 = 0$$

passant par σ_2, on obtient de même sur V_3^{16} une surface rationnelle G_2 d'ordre huit, ayant quatre points doubles coniques aux points quadruples de V_3^{16} situés dans Σ_2. Elle appartient à l'hyperplan

$$\Sigma \lambda_i \lambda_k\, Y_{ik} = 0 \tag{5}$$

passant par Σ_2.

Les surfaces G_1, G_2 forment des réseaux.

Une surface G_1 et une surface G_2 sont situées sur l'hyperquadrique

$$\Sigma \lambda_i \mu_k \lambda_j \mu_h Y_{ij} Z_{kh} = 0, \tag{6}$$

qui correspond à

$$(\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\,(\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2) = 0$$

Observons que sur la variété V'_3 on a

$$G'_1 + G'_2 \equiv F'_1,$$

donc sur la variété V_3^{16}

$$G_1 + G_2 \equiv F_1.$$

L'hyperquadrique (6) se compose des hyperplans (4) et (5) et d'autre part elle touche la variété V_3^{16} le long de la surface $G_1 + G_2$, donc le long de chacune des surfaces G_1 ou G_2, il y a un hyperplan touchant la variété V_3^{16}. On a par suite

$$F_0 \equiv 2G_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \equiv 2\,G_2 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4.$$

5. L'application de la formule de Zeuthen montre que les sections de la variété V_3^{16} par les espaces à 7 dimensions sont des courbes de genre neuf, que les intersections d'une surface F_0 par une surface F_1 sont des courbes de genre neuf également et que les intersections de deux surfaces F_1 sont des courbes de genre sept.

Une hyperquadrique (2) de S_5 coupe une surface G'_1 de V'_3 suivant une courbe de genre cinq transformée en soi par H, ne passant en général par aucun point uni ; par conséquent les sections hyperplanes des surfaces G_1 sont des courbes de genre trois. Il en est de même des sections hyperplanes des surfaces G_2.

La section de V'_3 par un espace à trois dimensions passant par σ_1 est une biquadratique elliptique passant par les quatre points unis de H situés dans σ_1. On en déduit que l'intersection de deux surfaces G_1 est une courbe rationnelle C_1 d'ordre quatre.

Observons que les quatre points quadruples de V_3^{16} situés sur Φ_1 appartiennent à un espace à trois dimensions que nous désignerons par σ'_1. Les intersections de deux surfaces G_1 étant variables, ne peuvent appartenir à σ'_1 et par conséquent elles appartiennent à des espaces à quatre dimensions passant par σ'_1.

Aux cônes du second ordre de S_5 ayant pour sommet l'espace σ_1 correspondent sur V_3^{16} les surfaces du système $|\,2\,G_1\,|$, ∞^5, composé au moyen de la congruence des courbes C_1.

On arrive à des conclusions analogues en considérant les surfaces G_2.

Ajoutons que la variété V_3^{16} est rationnelle, comme l'a du reste démontré Fano.

Liège, le 5 octobre 1962.