RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.
Estratto dal vol. XI, serie 6ª, 1° sem., fasc. 1. – Roma, gennaio 1930-VIII.

Matematica (Geometria). — *Sur une propriété de l'enveloppe de certaines familles de quadriques.* Nota di L. GODEAUX, presentata [1] dal Corrisp. G. FUBINI.

On sait que MM. Bompiani et Tzitzeica ont montré que les points qui représentent sur une hyperquadrique de l'espace à cinq dimensions les tangentes aux asymptotiques d'une surface de l'espace ordinaire, sont consécutifs dans une suite de Laplace [2]. Nous avons établi que cette suite est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique considérée et nous en avons déduit l'existence d'une suite de quadriques attachée en chaque point d'une surface: La première quadrique de la suite est la quadrique de Lie; deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces deux quadriques. Nous avons étudié différentes propriétés de ces quadriques [3], et avons notamment établi dans quelles conditions les asymptotiques se correspondaient sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie [4]. C'est ce résultat que nous nous proposons de généraliser ici. Nous considérons certaines suites de quadriques, dépendant de deux paramètres u, v, telles que deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points, caractéristiques de ces quadriques. Nous établissons une condition sous laquelle les asymptotiques sur les lieux de ces quatre points sont les lignes u, v. De cette propriété, on peut déduire la suivante:

(1) Nella seduta del 5 gennaio 1930.

(2) BOMPIANI, *Sull'equazione di Laplace*, «Rend. Circolo Matem. Palermo», 1912, t. XXXIV, pp. 383-407; TZITZEICA, *Géométrie projective différentielle des réseaux*, Paris, Gauthier-Villars, 1924.

(3) *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé*, «Bull. Acad. Roy. de Belgique». (1927, pp. 812-826, 1928, pp. 31-41); *Sur les surfaces ayant mêmes quadriques de Lie*, id., pp. 158-186, 345-348, 455-466; *Sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (id., 1929, 3753, 702-710); *Sur les quadriques de Lie de certaines surfaces*; *Sur la transformation de Guichard et sur certaines quadriques considérées par M. Demoulin*, (id., nov. 1929); *Sur quelques familles de quadriques attachées aux points d'une surface*, «Annales de la Soc. Polonaise de Math.», 1928, pp. 213-226; *Sur les surfaces dont les quadriques de Lie n'ont que trois points caractéristiques*, «Bull. Soc. Math. de Franc.», 1928, pp. 26-41.

(4) Voir *Sur l'enveloppe*, loc. cit.

Soit (x) une surface dont les asymptotiques sont les lignes u, v. Considérons la suite de quadriques Φ, Φ_1, $\Phi_2 \cdots$ attachée en un point de cette surface. Si aux développables de la congruence engendrée par une des droites communes aux quadriques Φ_n, Φ_{n+1}, correspondent sur (x) les courbes d'un réseau conjugué, les asymptotiques sur les nappes communes des enveloppes de ces quadriques sont les courbes u, v.

1. Soit Q l'hyperquadrique d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5 représentant les droites d'un espace projectif ordinaire S_3. Considérons un réseau (U) de l'espace S_5, les paramètres des lignes conjuguées étant u, v. Ce réseau détermine une suite de Laplace

$$(1) \qquad \cdots U_{-n}, \cdots, U_{-1}, U, U_1, \cdots, U_n, \cdots$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v. Nous supposerons que cette suite n'appartient pas à Q.

Désignons par V_n le pôle de l'hyperplan $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1} U_{n+2}$ par rapport à Q. On sait que le point V_n appartient à une suite de Laplace

$$(2) \qquad \cdots, V_{-n}, \cdots, V_{-1}, V, V_1, \cdots, V_n, \cdots$$

dont chaque point, transformé du précédent dans le sens des u, est le pôle par rapport à Q d'un hyperplan contenant cinq points consécutifs de la suite (1). La suite (2) est la suite polaire de la suite (1) par rapport à l'hyperquadrique Q (1).

Les plans $U_n U_{n+1} U_{n+2}$, $V_n V_{n+1} V_{n+2}$, conjugués par rapport à Q, coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques qui représentent les génératrices rectilignes des deux modes d'une quadrique Φ_n de S_3. On obtient ainsi dans cet espace une suite de quadriques

$$\cdots, \Phi_{-n}, \cdots, \Phi_{-1}, \Phi, \Phi_1, \cdots, \Phi_n, \cdots.$$

Nous avons démontré (2) que deux quadriques consécutives de cette suite se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques des deux quadriques. Les quadriques Φ_{n-1}, Φ_n, qar exemple, ont en commun quatre droites qui ont pour images, sur Q, les points de rencontre de cette hyperquadrique avec les droites $U_n U_{n+1}$, $V_n V_{n+1}$. Nous supposerons dans cette note que ces droites n'appartiennent pas à Q.

Désignons par L_1, L_2 les points de rencontre de $U_n U_{n+1}$, par M_1, M_2 ceux de $V_n V_{n+1}$ avec Q, par l_1, l_2, m_1, m_2 les droites, communes aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n, représentées par ces points. Désignons en outre par x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} respectivement les points communs aux droites l_1 et m_1, l_1 et m_2, l_2 et m_1, l_2 et m_2. Ces quatre points sont les points caractéristiques des quadriques Φ_{n-1}, Φ_n. Le faisceau de rayons de sommet x_{ik} et dont

(1) TZITZEICA, loc. cit.

(2) Voir *Sur les lignes asymptotiques*, loc. cit. (seconde note).

le plan est le plan tangent commun aux quadriques Φ_{n-1}, Φ_n et à la partie commune de leurs enveloppes, est représenté sur Q par la droite $L_i M_k$, qui appartient entièrement à cette hyperquadrique, puisque L_i, M_k sont conjugués.

Nous nous proposons d'examiner les propriétés des surfaces (x_{ik}) lorsque le point L_1, par exemple, décrit un réseau (L_1) conjugué à la congruence $(U_n U_{n+1})$. Nous ferons l'hypothèse que les quatre surfaces (x_{ik}) sont des surfaces proprement dites et qu'aucune d'elles n'est un plan.

2. Supposons en premier lieu que les points L_1, L_2, M_1, M_2 soient distincts. Alors les points U_n, U_{n+1}, V_n, V_{n+1} ne peuvent appartenir à l'hyperquadrique Q.

Puisque le point (L_1) décrit un réseau, la droite l_1 décrit une congruence (l_1) qui, d'après un théorème da Darboux, est une congruence W. Les surfaces focales de cette congruence étant (x_{11}), (x_{12}), les asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces et le point L_1 décrit un réseau conjugué aux congruences quadratiques $(L_1 M_1)$, $(L_1 M_2)$. Les asymptotiques sur les surfaces (x_{11}), (x_{12}) sont donc les u, v.

D'après le théorème de Ribaucour généralisé [1], le point L_2 décrit également un réseau (L_2) conjugué à la congruence $(U_n U_{n+1})$ et par suite les asymptotiques sur les surfaces (x_{21}), (x_{22}) sont les courbes u, v.

La congruence (m_1) a pour surfaces focales (x_{11}), (x_{21}) et les asymptotiques u, v se correspondent sur ces surfaces, donc (m_1) est une congruence W et M_1 décrit un réseau (M_1) conjugué à la congruence $(V_n V_{n+1})$. Pour la même raison, il en est de même de M_2.

3. Supposons maintenant que les points L_1, L_2 soient conrondus, les points M_1, M_2 étant distincts. Alors le point L_1 coïncide avec l'un des points U_n, U_{n+1}; supposons en premier lieu que ce soit avec U_{n+1}. Les points V_n, V_{n+1} n'appartiennent pas à Q et les points x_{21}, x_{22} coïncident respectivement avec les points x_{11}, x_{12}.

La droite l_1 engendre une congruence W et les asymptotiques sur les surfaces (x_{11}), (x_{12}) sont les courbes u, v. Soient $\overline{U}$, $\overline{V}$ les points de la droite $U_{n+1} M_1$ qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x_{11}). Ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace que nous représenterons par

$$(3) \qquad \cdots, \overline{U}_n, \cdots, \overline{U}, \overline{V}, \cdots, \overline{V}_n, \cdots,$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. La suite de Laplace (1) est inscrite dans la suite de Laplace (3); précisément, le point U_n appartient à la droite $\overline{V}\overline{V}_1$, U_{n-1} à la droite $\overline{V}_1\overline{V}_2$, U_{n-2} à $\overline{V}_2\overline{V}_3$. On sait que l'hyperplan polaire de $\overline{U}_1$ par rapport à Q est $\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2\overline{V}_3$. Mais cet hyperplan contient l'espace $U_{n-2} U_{n-1} U_n U_{n+1}$,

(1) Tzitzeica, loc. cit.

qui est conjugué de la droite $V_{n-1} V_n$. Donc le point $\overline{U}_1$ appartient à cette droite et la suite de Laplace (3) est inscrite dans la suite (2). Il en résulte que le point $\overline{U}$ coïncide avec le poit M_1. Ce point représente donc la tangente à l'asymptotique u de la surface (x_{11}). On établirait de même que le point M_2 représente la tangente à l'asymptotique u de la surface (x_{12}).

Supposons en second lieu que le point L_1 coïncide avec U_n. Les asymptotiques sur les surfaces $(x_{11}), (x_{12})$ sont encore les courbes u, v. Par un raisonnement analogue au précédent, on voit que les points M_1, M_2 représentent respectivement les tangentes aux asymptotiques v des surfaces $(x_{11}), (x_{12})$.

4. Reste à examiner le cas où les droites $U_n U_{n+1}, V_n V_{n+1}$ sont toutes deux tangentes à l'hyperquadrique Q. Alors les quatre surfaces (x_{ik}) coïncident en une seule que nous désignerons par (x). Les lignes asymptotiques sur cette surface sont encore les lignes u, v.

Si les points L_1, L_2 coïncident avec le point U_{n+1} et les points M_1, M_2 avec V_{n+1}, la droite $U_{n+1} V_{n+1}$ appartient à Q. Représentons encore par $\overline{U}, \overline{V}$ les points de Q images des tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x), et considérons encore la suite (3). L'hyperplan polaire de $\overline{U}_1$ est $\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1 \overline{V}_2 \overline{V}_3$; il contient l'espace $U_{n+1} U_n U_{n-1} U_{n-2}$, car la suite (1) est inscrite dans la suite (3). Par suite, $\overline{U}_1$ appartient à la droite $V_{n-1} V_n$ et coïncide avec V_n, puisque $\overline{U}\overline{U}_1$ passe par V_n. On démontrerait de même que $\overline{V}_1$ coïncide avec U_n. Par suite, $\overline{U}$ coïncide avec V_{n+1} et $\overline{V}$ avec U_{n+1}. Il en résulte que les suites (1), (2) et (3) sont confondues. U_{n+1} et V_{n+1} représentent les tangentes asymptotiques de la surface (x). La quadrique Φ_n est dégénérée en deux plans confondus avec le plan tangent à (x) et la quadrique Φ_{n-1} est la quadrique de Lie relative à cette surface.

Si les points L_1, L_2 coïncident avec U_{n+1} et les points M_1, M_2 avec V_n, la droite $U_{n+1} V_n$ appartient à Q. Représentons toujours par $\overline{U}, \overline{V}$ les points de cette droite images des tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (x) et considérons encore la suite (3). Cette suite est circonscrite aux suites (1) et (2). En raisonnant comme dans le premier cas, on voit que $\overline{U}_1$ doit appartenir à $V_n V_{n+1}$ et par suite coincider avec V_{n-1}; $\overline{U}$ coïncide avec V_n. De même, $\overline{V}_1$ doit appartenir à $U_{n-2} U_{n-1}$ et par suite $\overline{V}$ à $U_{n-1} U_n$. Il en résulte que $\overline{V}$ doit coïncider avec U_n. Mais alors U_n appartiendrait à Q et il en serait de même de la droite $U_n U_{n+1}$, contrairement à l'hypothèse.

On démontrerait de même que L_1, L_2 ne peuvent coïncider avec U_n et M_1, M_2 avec V_{n+1}. Reste le dernier cas, où L_1, L_2 coïncident avec U_n et M_1, M_2 avec V_n. Un raisonnement analogue au précédent montre que le point U_{n+1} coïncide avec V_n et que par suite la droite $U_n U_{n+1}$ appartient à Q, contrairement à l'hypothèse.

En résumé, on voit que *si l'un des points de rencontre d'une des droites* $U_n U_{n+1}, V_n V_{n+1}$ *avec* Q *décrit un réseau conjugué à la congruence engen-*

drée par la droite considérée, les asymptotiques sur les surfaces qui font partie des enveloppes des quadriques Φ_n, Φ_{n-1}, sont les lignes u, v.

5. Adoptons de nouvelles notations et soit (x) une surface dont les asymptotiques sont les lignes u, v. Si U, V sont les points de Q qui représentent les tangentes aux asymptotiques de (x), ces points sont consécutifs dans une suite de Laplace

$$(4) \qquad \cdots, U_n, \cdots, U_1, U, V, V_1, \cdots, V_n, \cdots.$$

La quadrique de Lie Φ est représentée par les sections de Q par les plans UU_1U_2, VV_1V_2; la quadrique Φ_1 par les plans $U_1U_2U_3$, $V_1V_2V_3$; $\cdots$; la quadrique Φ_n par les plas $U_nU_{n+1}U_{n+2}$, $V_nV_{n+1}V_{n+2}$; $\cdots$. Deux quadriques consécutives de la suite $\Phi, \Phi_1, \cdots, \Phi_n, \cdots$ se touchent en quatre points qui sont des points caractéristiques de ces surfaces. Si l'un des points d'intersection L de la droite U_nU_{n+1} avec Q décrit un réseau conjugué à la congruence (U_nU_{n+1}), les asymptotiques sur les nappes communes des enveloppes des quadriques Φ_n, Φ_{n-1} sont les courbes u, v. Le point L détermine une suite de Laplace inscrite dans la suite (4) et un point de cette suite appartient à la droite UV (et peut d'ailleurs éventuellement coïncider avec un des points U, V). Par suite les développables de la congruence engendrée par la droite l, ayant pour image L, correspondent aux courbes d'un réseau conjugué de la surface (x). Or la droite l appartient aux quadriques Φ_n, Φ_{n-1}, et le théorème énoncé dans l'avant-propos est établi.

6. Voici une application de ce qui précède. Soit (j) une congruence W ayant pour surfaces focales la surface (x) dont il vient d'être question et une surface $(\bar{x})$ dont les quadriques de Lie n'ont que deux points caractéristiques, $\bar{x}$, y. Les asymptotiques sur la surface $(\bar{x})$ sont les courbes u, v et la suite de Laplace

$$(5) \qquad \overline{U}_2, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \overline{V}_2,$$

analogue à la suite (4), relative à la surface $(\bar{x})$ a la période six. Les droites UV, $\overline{U}\overline{V}$ appartiennent à Q et se coupent en un point J, image de la droite j. Le point J décrit un réseau (J) conjugué aux congruences (UV), $(\overline{U}\overline{V})$ et appartient à une suite de Laplace

$$(6) \qquad \cdots, J_{-1}, J, J_1, \cdots$$

inscrite dans les suites (4), (5). Nous supposerons la suite (6) non périodique. Les points J_{-2}, J_2 appartiennent à $\overline{U}_2\overline{V}_2$ et sont situés, le premier sur U_2U_3, le second sur V_2V_3. Les quadriques Φ_1, Φ_2 relatives à la surface (x) ont en commun quatre nappes de leurs enveloppes et sur ces nappes, les lignes asymptotiques sont les courbes u, v.

L'une de ces nappes est d'ailleurs la surface (y), car les tangentes asymptotiques de celles-ci sont représentées sur Q par les points $\overline{V}_2$, $\overline{U}_2$.

Roma, 1930 — Dott. G. Bardi, tip. della R. Accad. dei Lincei.