Quelques remarques sur les suites de Laplace,

par Lucien Godeaux (*)

On sait que l'on appelle suite de Laplace dans un espace projectif S_r à r dimensions, une suite de points ..., X_n, ..., X_1, X... dépendant de deux paramètres u, v telle que la droite X_nX_{n-1} déterminée par deux points consécutifs engendre une congruence (X_nX_{n-1}) dont les surfaces focales sont les surfaces (X_n), (X_{n-1}), les paramètres des développables étant u, v. Nous appellerons avec Demoulin ligne brisée de Laplace le polygone formé par les droites joignant deux points consécutifs d'une suite de Laplace.

Nous aurons aussi à considérer l'ensemble des plans déterminés par trois points consécutifs d'une suite de Laplace ; nous dirons que cet ensemble est le polyèdre à faces planes associé à la suite de Laplace. Plus généralement, nous considérerons l'ensemble des espaces à ρ dimensions déterminés par $\rho + 1$ points consécutifs d'une suite de Laplace ; ce sera le polyèdre à faces à ρ dimensions associé à la suite de Laplace.

1. Soient, dans un espace linéaire S_r à r dimensions, deux surfaces (U), (V) rapportées toutes deux à des coordonnées curvilignes u, v. Nous dirons que deux points U, V sont homologues s'ils ont les mêmes coordonnées curvilignes u, v.

Si la tangente à la ligne u (sur laquelle u varie) en un point U de (U) passe par le point V homologue et si la tangente à la ligne v en ce point V passe par le point U, les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre. D'une manière précise, V est le transformé de Laplace de U dans le sens des u et U celui de V dans le sens des v.

(*) Conférence faite le 15 février 1957.

Pour simplifier les notations, posons, si φ est une fonction de u, v,

$$\varphi^{ik} = \frac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}.$$

Les coordonnées projectives homogènes des points U, V satisfont à des équations que l'on peut mettre sous la forme

$$U^{10} + 2bV = 0, \; V^{01} + 2aU = 0, \tag{1}$$

a, b étant des fonctions de u, v. Les points U, V satisfont à des équations de Laplace

$$U^{11} - U^{10} (\log b)^{01} - 4ab\, U = 0, \;\; V^{11} - V^{01} (\log a)^{10} - 4abV = 0.$$

Les points U, V appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et que nous supposerons illimitée dans les deux sens.

On a

$$\left.\begin{aligned} U^{01}_{n-1} &= U_n + U_{n-1} (\log.\ bh_1 \ldots h_{n-1})^{01}, \quad U^{10}_n = h_n U_{n-1}, \\ V^{10}_{n-1} &= V_n + V_{n-1} (\log.\ ak_1 \ldots k_{n-1})^{10}, \quad V^{01}_n = k_n V_{n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où l'on a posé

$$h_i = -(\log.\ bh_1 \ldots h_{i-1})^{11} + h_{i-1}.$$

$$k_i = -(\log.\ ak_1 \ldots k_{i-1})^{11} + k_{i-1}.$$

2. Si, dans l'espace S_r, on effectue une homographie, il est bien évident qu'à une suite de Laplace, correspond une suite de Laplace, les fonctions a et b étant les mêmes.

Cela étant, considérons dans S_r un espace S_ρ et un espace $S_{r-\rho-1}$ ne se rencontrant pas. Nous pouvons toujours supposer que ces espaces appartiennent à la pyramide de référence, un changement de figure de référence revenant à une homographie. Désignons par O_i ($i = 0, 1, \ldots, r$) le sommet de la pyramide de référence dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_i. Nous supposerons que S_ρ coïncide avec l'espace $O_0O_1 \ldots O_\rho$ et $S_{r-\rho-1}$ avec l'espace $O_{\rho+1}O_{\rho+2} \ldots O_r$.

Projetons la suite de Laplace L de $S_{r-\rho-1}$ sur S_ρ. Si $x_0, x_1, \ldots, x_r$ sont les coordonnées d'un point X dans S_r, les coordonnées de sa projection $\overline{X}$ dans S_ρ seront $x_0, x_1, \ldots, x_\rho$. Par conséquent, les coordonnées des points $\overline{U}$, $\overline{V}$, projections des points U, V dans S_ρ satisfont aux équations (1) et les points $\overline{U}$, $\overline{V}$ sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

On en conclut que les projections

$$\ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1 \ldots, \overline{V}_n, \ldots \qquad (\overline{L})$$

dans S_ρ des points de la suite L formant une suite de Laplace $\overline{L}$ dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, la suite étant illimitée dans les deux sens. Nous supposerons $r < 2\rho$.

La projection d'une suite de Laplace L *de* S_r *à partir d'un espace* $S_{r-\rho-1}$ *sur un espace* S_ρ *est une suite de Laplace.*

Considérons $r - \rho + 1$ points, consécutifs de la suite L. Ils déterminent un espace ξ à $r - \rho$ dimensions qui rencontre S_ρ en un point appartenant à l'espace à $r - \rho$ dimensions déterminé par les projections des points qui déterminent ξ. On obtient ainsi une suite de points incrite dans les polyèdre à faces à $r - \rho$ dimensions associé à la suite $\overline{L}$. Nous allons démontrer que cette suite est une suite de Laplace. Nous commencerons par le cas $\rho = r - 1$.

3. Projetons donc la suite L du point O_r sur l'espace S_{r-1} déterminé par les points $O_0O_1 \ldots O_{r-1}$. Désignons par J le point commun aux droites UV et $\overline{U}\overline{V}$, par J_1 le point commun aux droites U_1U, $\overline{U}_1\overline{U}$, par J_{-1} le point commun aux droites VV_1, $\overline{V}\overline{V}_1$ et d'une manière générale par J_i le point commun aux droites U_iU_{i-1}, $\overline{U}_i\overline{U}_{i-1}$, par J_{-i} celui qui est commun aux droites V_iV_{i-1} et $\overline{V}_i\overline{V}_{i-1}$.

Lorsque u varie, les droites U_1U, $\overline{U}_1\overline{U}$ engendrent des développables dont les plans tangents sont respectivement U_1UV, $\overline{U}_1\overline{U}\overline{V}$, donc la tangente à la ligne u décrite par le point J_1 est l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la droite J_1J. On démontre de même que lorsque v varie, la tangente à la ligne v décrite par J est la droite JJ_1. Les points J, J_1 sont donc transformés de Laplace l'un de l'autre.

Le même raisonnement peut être repris pour deux points consécutifs de la suite

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots \qquad (\mathcal{J})$$

et celle-ci est donc une suite de Laplace dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. La suite $\mathcal{J}$ est inscrite dans la suite $\overline{L}$.

On peut obtenir l'expression analytique des points de $\mathcal{J}$ de la manière suivante :

Appelons, pour abréger les notations, μ la $(r+1)$-ième coordonnée de U, λ celle de V, μ_i celle de U_i et λ_i celle de V_i.

On a

$$J = \lambda\overline{U} - \mu\overline{V}, \quad J_i = \mu_{i-1}\overline{U}_i - \mu_i\overline{U}_{i-1}, \quad J_{-i} = \lambda_{i-1}\overline{V}_i - \lambda_i\overline{V}_{i-1}.$$

Les quantités μ_i, λ_i satisfont aux équations (2) et λ, μ aux équations (1).

4. Nous allons montrer qu'inversement, on obtient par le procédé précédent la suite de Laplace la plus générale inscrite dans la suite $\overline{L}$.

Si λ, μ sont deux fonctions de u, v et si l'on considère le point

$$J = \lambda\overline{U} - \mu\overline{V},$$

on a

$$J^{11} - J^{10}(\log\mu)^{01} - J^{01}(\log\lambda)^{10} - J[(\log\lambda)^{10}(\log\mu)^{01} - 4ab]$$
$$= \lambda\left(\frac{\lambda^{01} + 2a\mu}{\lambda}\right)^{10}\overline{U} - \mu\left(\frac{\mu^{10} + 2b\lambda}{\mu}\right)^{01}\overline{V}.$$

Pour que le point J décrive un réseau conjugué à la congruence $(\overline{U}\overline{V})$, le second membre de la relation précédente doit coïncider avec J, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\left(\frac{\lambda^{01} + 2a\mu}{\lambda}\right)^{10} = \left(\frac{\mu^{10} + 2b\lambda}{\mu}\right)^{01}.$$

Si au lieu de J, nous considérons le point ρJ, qui occupe la même position que J, nous devrons avoir

$$\left[\frac{(\rho\lambda)^{01} + 2a\rho\mu}{\rho\lambda}\right]^{10} = \left[\frac{(\rho\mu)^{10} + 2b\rho\lambda}{\rho\mu}\right]^{01}.$$

Nous pouvons choisir ρ de manière à avoir

$$(\rho\lambda)^{01} + 2a\rho\mu = 0, \quad (\rho\mu)^{10} + 2b\rho\lambda = 0,$$

comme on le voit facilement. En changeant de notation, pour que le point J décrive un réseau conjugué à la congruence $(\overline{\mathrm{U}}\overline{\mathrm{V}})$, on peut choisir le facteur de proportionnalité des coordonnées pour que λ, μ satisfassent aux équations (1). Ce résultat est dû à Demoulin (dans l'espace à trois dimensions).

Il suffit alors de considérer un espace S_r passant par S_{r-1} et d'y considérer le point U dont les coordonnées sont celles de $\overline{\mathrm{U}}$ et μ, et le point V, dont les coordonnées sont celles de $\overline{\mathrm{V}}$ et λ, pour retrouver la suite L.

5. Considérons maintenant le cas où ρ est quelconque $(2\rho > r)$. Désignons par A le point de rencontre avec S_ρ de l'espace à $r - \rho$ dimensions déterminé par les points $UU_1 \ldots U_{r-\rho}$ et par B le point d'intersection de S_ρ avec l'espace $VUU_1 \ldots U_{r-\rho-1}$. Nous allons montrer que les points A, B sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Lorsque u varie, les espaces $UU_1 \ldots U_{r-\rho}$ et $\overline{\mathrm{U}}\overline{\mathrm{U}}_1 \ldots \overline{\mathrm{U}}_{r-\rho}$ engendrent des variétés à caractère de développables, les espaces tangents le long des espaces considérés étant $VUU_1 \ldots U_{r-\rho}$, $\overline{\mathrm{V}}\overline{\mathrm{U}}\overline{\mathrm{U}}_1 \ldots \overline{\mathrm{U}}_{r-\rho}$. Ces deux espaces ont en commun la droite AB, donc la tangente à la ligne u décrite par le point A passe par B. On démontre de même que la tangente à la ligne décrite par B lorsque v varie passe par A, d'où la propriété énoncée.

Il en résulte que les espaces à $r - \rho$ dimensions déterminés par $r - \rho + 1$ points consécutifs de la suite L coupent S_ρ suivant les points d'une suite de Laplace $\mathcal{A}$ inscrite dans le polyèdre à faces à $r - \rho$ dimensions associé à la suite $\overline{\mathrm{L}}$.

Choisissons, parmi les points $O_{\rho+1} \ldots O_r$ qui déterminent le centre de projection $S_{r-\rho-1}$, $r - \theta$ points, pour fixer les idées, les points $O_{\theta+1}, \ldots, O_r$. Ils déterminent un $S_{r-\theta-1}$. Projetons la suite L de cet espace sur l'espace $S_\theta \equiv O_0O_1 \ldots O_\theta$; nous obtenons une suite L'. Les points d'intersection de S_θ avec les espaces déterminés par $r - \theta + 1$ points consécutifs de la suite L forment une suite de Laplace inscrite dans le polyèdre à faces à $r - \theta$ dimensions associé à la suite L'.

Projetons la suite L' et la suite $\mathcal{A}'$ sur S_ρ à partir de l'espace à $\theta - \rho - 1$ dimensions déterminé par les points $O_{\rho+1} \ldots O_\theta$. A la suite L' correspond la suite $\overline{L}$ et à la suite $\mathcal{A}'$ une suite $\mathcal{A}_\theta$ inscrite dans le polyèdre à faces à $r - \theta$ dimensions associé à la suite $\overline{L}$.

L'espace $\overline{U}\overline{U}_1 \ldots \overline{U}_{r-\rho}$ contient un point de la suite $\mathcal{A}$. Les $\theta - \rho + 1$ espaces $\overline{U}\overline{U}_1 \ldots \overline{U}_{r-\theta}$, $\overline{U}_1\overline{U}_2 \ldots \overline{U}_{r-\theta+1}, \ldots, \overline{U}_{\theta-\rho} \ldots U_{r-\rho}$ contiennent $\theta - \rho + 1$ points consécutifs de la suite $\mathcal{A}_\theta$. Il en résulte que la suite $\mathcal{A}$ est inscrite dans un polyèdre à faces à $\theta - \rho$ dimensions associé à la suite $\mathcal{A}_\theta$.

Pour $\theta = r - 1$, la suite $\mathcal{A}_\theta$ est inscrite dans la suite $\overline{L}$. Pour former une suite $\mathcal{A}_{r-1}$, il faut prendre un point parmi les points $O_{\rho+1} \ldots O_r$, ce qui peut se faire de $r - \rho$ manières. On en conclut que la suite $\mathcal{A}$ est inscrite dans les polyèdres à faces à $r - \rho - 1$ dimensions associés à $r - \rho$ suites de Laplace inscrites dans la suite $\overline{L}_n$.

6. Il s'agirait maintenant d'établir que la suite $\mathcal{A}$ la plus générale peut être obtenue par le procédé précédent. Nous nous bornerons à le faire dans le cas $\rho = r - 2$. Nous avons alors une suite $\mathcal{A}$ inscrite dans le polyèdre à faces planes associé à $\overline{L}$. Nous dirons simplement le polyèdre associé à $\overline{L}$, aucune confusion n'étant possible.

Nous désignerons par A le point de la suite $\mathcal{A}$ appartenant au plan $\overline{U}_1\overline{U}\overline{V}$, par $A_1, A_2, \ldots$ les transformés de A dans le sens des v, par B le point se trouvant dans le plan $\overline{U}\overline{V}\overline{V}_1$, par $B_1, B_2, \ldots$ ses transformés successifs dans le sens des u. Le point A_n appartient donc au plan $\overline{U}_{n-1}\overline{U}_n\overline{U}_{n+1}$ et le point B_n au plan $\overline{V}_{n-1}\overline{V}_n\overline{V}_{n+1}$.

Avant d'aller plus loin, indiquons les expressions analytiques des points A, B.

Désignons comme plus haut par $\ldots, \mu_n, \ldots, \mu, \lambda, \ldots, \lambda_n, \ldots$ les $(r + 1)$-ièmes coordonnées des points de la suite L, par $\ldots, \mu'_n, \ldots,$

μ', λ', ..., λ'_n, ... les r-ièmes coordonnées des points de la même suite. Nous avons

$$A = \begin{vmatrix} U_1 & U & V \\ \mu_1 & \mu & \lambda \\ \mu'_1 & \mu' & \lambda' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} V_1 & V & U \\ \lambda_1 & \lambda & \mu \\ \lambda'_1 & \lambda' & \mu' \end{vmatrix}. \tag{3}$$

On en déduit

$$(\mu\lambda' - \lambda\mu') A^{10} - (\mu\lambda' - \lambda\mu')^{10} A + (\mu_1\mu' - \mu\mu'_1) B = 0,$$
$$(\lambda\mu' - \lambda'\mu) B^{01} - (\lambda\mu' - \mu\lambda')^{01} B + (\lambda_1\lambda' - \lambda\lambda'_1) A = 0,$$

ce qui montre que les points A, B sont bien les transformés de Laplace l'un de l'autre.

On a également

$$A_n = \begin{vmatrix} U_{n+1} & U_n & U_{n-1} \\ \mu_{n+1} & \mu_n & \mu_{n-1} \\ \mu'_{n+1} & \mu'_n & \mu'_{n-1} \end{vmatrix}, \quad B_n = \begin{vmatrix} V_{n+1} & V_n & V_{n-1} \\ \lambda_{n+1} & \lambda_n & \lambda_{n-1} \\ \lambda'_{n+1} & \lambda'_n & \lambda'_{n-1} \end{vmatrix}.$$

7. Reprenons la suite $\overline{L}$ et donnons-nous deux points : un point A situé dans le plan U_1UV (nous écrivons pour simplifier U_1 au lieu de $\overline{U}_1$, ..., aucune confusion n'étant possible) et un point B du plan V_1VU ; supposons que B soit le transformé de Laplace de A dans le sens de u, A celui de B dans le sens de v.

Nous allons démontrer qu'il existe une infinité de points J de la droite UV telle que la droite JJ^{01} passe par A et la droite JJ^{10} par B.

Considérons le point $J = \lambda U - \mu V$, λ et μ étant des fonctions de u, v satisfaisant aux équations

$$\lambda^{01} + 2a\mu = 0, \qquad \mu^{10} + 2b\lambda = 0. \tag{1}$$

Le point J décrit un réseau conjugué à la congruence (UV) et le transformé de Laplace de J dans le sens des v est

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U,$$

où

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu (\log b)^{01} \tag{2}$$

Un point du plan U_1UV peut se représenter par

$$\eta_1 U_1 + \eta U + \xi V$$

et η_1, η, ξ sont les coordonnées locales de ce point.

La droite J_1J a pour équation locale

$$\mu_1\eta_1 + \mu\eta + \lambda\xi = 0.$$

Supposons que, dans cette équation, η_1, η, ξ soient les coordonnées locales de A, c'est-à-dire des fonctions connues de u, v. En tenant compte de la seconde des équations (1) et de (2), elle devient

$$\xi\mu^{10} - 2b\eta_1\mu^{01} = 2b[\eta - \eta_1 (\log b)^{01}]\mu. \tag{3}$$

Écrivons le système différentiel

$$\frac{du}{\xi} = -\frac{dv}{2b\eta_1} = \frac{d\mu}{2b[\eta - \eta_1 (\log b)^{01}]\mu}.$$

Soit $\varphi_1(u, v) = C_1$ l'intégrale générale de l'équation

$$2b\eta_1 du + \xi dv = 0.$$

En tenant compte de cette solution, on déduit de l'équation

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\eta_1 (\log b)^{01} - \eta}{\eta_1} dv,$$

une intégrale

$$\mu = C_2 e^{\varphi_2(u\, v)}.$$

L'intégrale générale de l'équation (3) est donc

$$\mu = e^{\varphi_2}\Phi(\varphi_1),$$

où $\Phi(\varphi_1)$ est une fonction arbitraire de φ_1.

La seconde des équations (1) donne

$$2b\lambda = - e^{\varphi_2}[\varphi_2^{10}\Phi + \Phi'\varphi_1^{10}].$$

On en déduit

$$2b\lambda^{01} + 2b\lambda\ (\log\ b)^{01} = - D_v e^{\varphi_2}[\varphi_2^{10}\Phi + \Phi'\varphi_1^{10}],$$

ce qui donne

$$\varphi_1^{10}\varphi_1^{01}\Phi'' + [\varphi_1^{10}\varphi_2^{01} + \varphi_2^{10}\varphi_1^{01} + \varphi_1^{11} - \varphi_1^{10}(\log b)^{01}]\Phi'$$
$$+ [\varphi_2^{10}\varphi_2^{01} + \varphi_2^{11} - \varphi_2^{10}(\log b)^{01} - 4ab]\Phi = 0.$$

Dans cette équation, prenons comme nouvelles variables indépendantes φ_1, φ_2 au lieu de u, v. L'intégrale générale de l'équation dépend de deux fonctions arbitraires de φ_2. Il y a donc une infinité de solutions λ, μ des équations (1) satisfaisant à la question.

Si J_{-1} est le transformé de Laplace de J dans le sens des u, ce point appartient à V_1V et le point B appartient nécessairement à la droite JJ_{-1}.

On retrouve ainsi, pour $\rho = 3$, un théorème de Fubini, qui l'a obtenu sous la forme suivante : S'il existe, entre deux congruences de droites (UV), (AB) une correspondance biunivoque, les paramètres des développables étant les mêmes, et si les foyers A, B d'une droite de (AB) appartiennent aux plans focaux de la droite homologue de la congruence (UV), il existe une infinité de points de la droite UV tels que les plans tangents en ces points aux surfaces qu'ils décrivent, passent par la droite AB. Fubini dit que les congruences (AB), (UV) sont simplement stratifiables.

8. Revenons à notre problème et reprenons nos anciennes notations.

Sur la droite $\overline{UV}$, prenons deux points

$$J = \lambda\overline{U} - \mu\overline{V}, \quad J' = \lambda'\overline{U} - \mu'\overline{V},$$

tels que λ et μ, λ' et μ' satisfassent aux équations (1).

D'après ce qui précède, nous pouvons choisir ces points de

(1) Fubini, Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R (*Annali di Matematica*, série 4, tome I, 1924, pp. 241-257). Voir aussi Finikoff, Sur les congruences stratifiables (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1929, pp. 313-364), Vincensini, Sur les congruences stratifiables (*Journal de Mathématiques*, 1934, pp. 419-449), Sur certaines questions métriques liées aux congruences stratifiables (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **1934**, pp. 303-349).

telle sorte que les droites JJ_1, $J'J'_1$ passent par A et les droites JJ_{-1}, $J'J'_{-1}$ par B. On en déduit

$$A = \begin{vmatrix} \overline{U}_1 & \overline{U} & \overline{V} \\ \mu_1 & \mu & \lambda \\ \mu'_1 & \mu' & \lambda' \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \overline{V}_1 & \overline{V} & \overline{U} \\ \lambda_1 & \lambda & \mu \\ \lambda'_1 & \lambda' & \mu' \end{vmatrix},$$

Ces formules sont les mêmes que celles qui ont été établies plus haut (n° 6) ; cela montre que la suite de Laplace à laquelle appartiennent les points A, B peut toujours être obtenue par le procédé indiqué plus haut : On projette une suite de Laplace appartenant à un espace S_r à partir d'une droite sur un espace S_{r-1} et on prend les intersections de S_{r-2} avec les plans déterminés par trois points consécutifs de la suite de Laplace donnée dans S_r.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Godeaux. La théorie des surfaces et l'espace réglé. *Actualités scient.*, n° 138 (Paris, Hermann, 1934).