GODEAUX, LUCIEN
1958
Boll. U. M. I.
(3), Vol. 13, 551-554

Sopra una estensione della nozione di congruenze stratificabili (1).

Nota di LUCIEN GODEAUX

Sunto. - *Si dà una generalizzazione, in uno spazio lineare qualunque, della nozione di congruenze stratificabili dovuta a Fubini per uno spazio* S_3 (2).

Résumé. - *On donne une généralisation, dans un espace projectif quelconque, de la notion de congruences stratifiables due à* FUBINI *dans un espace à trois dimensions.*

1. Consideriamo, in uno spazio lineare S_n, due punti U, V le cui coordinate proiettive omogenee sono funzioni, differenziabili tante volte quante sarà necessario, di due variabili u, v. Supponiamo che U, V siano trasformati di LAPLACE l'uno dell'altro. Precisamente, supponiamo che si abbia (3)

$$U^{10} + 2bV = 0, \quad V^{01} + 2aU = 0, \tag{1}$$

dove a e b sono funzioni di u, v differenziabili tante volte quante sarà necessario.

(1) Sunto di una conferenza fatta il 12 novembre 1958 nell'Istituto di Geometria «Luigi Cremona» dell'Università di Bologna.

(2) FUBINI, *Su alcune classi di congruenze di rette e sulle trasformazioni delle superficie R*, «Annali di Matematica», ser. IV, tomo 1. 1923-1924, pp. 241-257. La denominazione stratificabile è dovuta a BIANCHI, *Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili*, «Rendiconti Acc. Lincei», 2° sem. 1924, pp. 369-377. Vedere anche FINIKOFF, *Sur les congruences stratifiables*, «Rendiconti Circolo Matematico di Palermo», 1929, pp. 313-364, VINCENSINI, *Sur les congruences stratifiables*, «Journal de Mathématiques», 1934, pp. 419-449, *Sur certaines questions métriques liées aux congruences stratifiables*, «Annales Fac. Sciences de Toulouse», 1934, pp. 303-319.

(3) Noi scriviamo φ^{ik} per $\dfrac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i\,\partial v^k}$.

I punti U, V appartengono ad una successione di LAPLACE

$$(L)\qquad \dots,\ U_n,\dots,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\dots,\ V_n,\dots,$$

dove si ha

$$U_n = U_{n-1}^{01} - U_{n-1}(\log.\ bh_1 \dots h_{n-1})^{01},\quad h_n = -(\log.\ bh_1 \dots h_{n-1})^{11} + h_{n-1},$$

$$V_n = V_{n-1}^{10} - V_{n-1}(\log.\ ak_1 \dots k_{n-1})^{10},\quad k_n = -(\log.\ ak_1 \dots k_{n-1})^{11} + k_{n-1}.$$

Se J è un punto della retta UV che descrive una rete coniugata alla congruenza (UV), si può scrivere

$$J = \lambda U - \mu V,$$

con

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0,\quad \lambda^{01} + 2a\mu = 0.$$

Il punto J appartiene ad una successione di LAPLACE

$$(J)\qquad \dots,\ J_n,\dots,J_1,\ J,\ J_{-1},\dots,\ J_{-n},\dots$$

inscritta nella successione L. Possiamo scrivere

$$J_n = \mu_{n-1}U_n - \mu_n U_{n-1},\quad J_{-n} = \lambda_{n-1}V_n - \lambda_n V_{n-1},$$

dove

$$\mu_n = \mu_{n-1}^{01} - \mu_{n-1}(\log.\ bh_1 \dots h_{n-1})^{01},$$

$$\lambda_n = \lambda_{n-1}^{10} - \lambda_{n-1}(\log.\ ak_1 \dots k_{n-1})^{10}.$$

Nelle successioni L, J, ogni punto è il trasformato del precedente nel senso delle u.

2. Consideriamo un punto A dello spazio a $2n$ dimensioni $UU_1U_2 \dots U_{2n}$, dove $2n < r$. Abbiamo dimostrato che si possono scegliere, sulla retta UV, $2n$ punti $J^{(1)}, J^{(2)},\dots,J^{(2n)}$ che descrivono reti coniugate alle congruenze (UV), tale che gli spazi a $2n-1$ dimensioni

$$J_2^{(1)}J_2^{(1)}\dots J_{2n}^{(1)},\quad J_1^{(2)}J_2^{(2)}\dots J_{2n}^{(2)},\ \dots,\quad J_1^{(2n)}J_n^{(2n)}\dots J_2^{(2n)}$$

passano per il punto A. (Noi scriviamo $J_n^{(i)}$ il punto J_n quando a J si sostituisce $J^{(i)}$).

Se il punto A descrive una rete coniugata (u, v), il suo trasformato di LAPLACE nel senso delle u, B, appartiene agli spazi

$$J_1^{(1)} J_1^{(1)} \dots J_{2n-1}^{(1)}, \; J^{(2)} J_1^{(2)} \dots J_{2n+1}^{(2)}, \; \dots, \; J_1^{(2n)} J_2^{(2n)} \dots J_{2n-1}^{(2n)}$$

e quindi allo spazio $U_{2n-1}\, U_{2n-2} \dots UV$.

Diciamo poliedro a faccie a $2n$ dimensioni l'insieme degli spazi a $2n$ dimensioni determinati da $2n+1$ punti consecutivi di una successione di LAPLACE. I punti A, B appartengono a una successione di LAPLACE a e possiamo dire che questa successione è inscritta nel poliedro di LAPLACE a faccie a $2n$ dimensioni associata alla successione L.

Chiamiamo A_0 il punto della successione a appartenente allo spazio $U_n \dots V_{n-1}$ e B_0 il punto appartenente allo spazio $U_{n-1} \dots V_n$. Il punto B_0 è il trasformato di LAPLACE di A_0 nel senso delle u.

Diremo che *la congruenza* $(A_0 B_0)$ *è n–stratificabile colla congruenza* (UV) [4].

Si vede anche che la congruenza $(A_i A_{i+1})$ è n–stratificabile colla congruenza $(U_i U_{i+l})$ e la congruenza $(B_i B_{i+l})$ colla congruenza $(V_i V_{i+l})$.

3. Possiamo dare una costruzione della congruenza $(A_0 B_0)$ nel modo seguente.

Possiamo scrivere

$$J^{(1)} = \lambda_i U - \mu_i V$$

con

$$\mu_i^{10} + 2b\lambda_i = 0, \quad \lambda_i^{01} + 2a\mu_i = 0. \tag{2}$$

(4) L. GODEAUX, *Une extension de la notion de congruences stratifiables*, « Mathematische Nachrichten » 1958, pp. 57-63. Vedere anche la nostra nota, *Remarques sur les couples de congruences stratifiables*, « Rendiconti del Seminario Matematico di Torino », 1956-57, pp. 219-226

Consideriamo uno spazio lineare S_{r+2n} contenente S_r ed in questo primo spazio, il punto $\overline{U}$ le cui $r+1$ prime coordinate sono quelle di U e le ultime $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n}$, ed un punto $\overline{V}$ di cui le $r+1$ prime coordinate sono quelle di V e le ultime $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2n}$. Colle formule (1) e (2), si vede che i punti $\overline{U}$, $\overline{V}$ appartengono ad una successione di Laplace

$$(\overline{L}) \qquad \ldots, \overline{U}_n, \ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_n, \ldots$$

la cui proiezione sopra S_r da uno spazio S_{2n-1} di S_{r+2n} è la successione L.

La retta $A_0\, B_0$ non è che l'intersezione di S_r collo spazio $\overline{U}_n \ldots \overline{V}_n$.

Si vede così che: *Se* $\overline{\mathrm{L}}$ *è una successione di Laplace di uno spazio* S_{r+2n} *ed* S_r, S_{2n-1} *due spazi lineari sghembi di* S_{r+2n}, *la proiezione di* $\overline{\mathrm{L}}$ *da* S_{2n-1} *sopra* S_r *è una successione di Laplace* L *e l'intersezione di* S_r *collo spazio* $\overline{\mathrm{U}}_n \ldots \overline{\mathrm{V}}_n$ *è una retta* $\mathrm{A}_0\, \mathrm{B}_0$ *che genera una congruenza n-stratificabile colla congruenza* (UV).

4. La condizione perchè la congruenza (UV) sia n-stratificabile colla congruenza $(A_0 B_0)$, cioè che le due congruenze siano doppiamente stratificabili, è che lo spazio $A_n \ldots B_{n-1}$ passi per il punto U. Allora, lo spazio $\overline{U}_{2n} \ldots \overline{V}_{2n-1}$ deve contenere il punto U e quindi la retta $U\overline{U}$. Questa retta incontra lo spazio S_{2n-1} in un punto U' e basta che lo spazio $U_{2n} \ldots V_{2n-1}$ contenga questo punto. Dobbiamo allora avere $r = 4n - 1$.

Ne deduciamo agevolmente la condizione analitica per la doppia stratificabilità della congruenza (UV), $(A_0 B_0)$, cioè

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots\, 0 & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \ldots\, \mu^{(2n)} \\ U^1_{2n} & U^2_{2n} & \ldots\, U^{4n}_{n2} & \mu^{(1)}_{1n} & \mu^{(2)}_{2n} & \ldots\, \mu^{(2n)}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U^1_1 & U^2_1 & \ldots\, U^{4n}_1 & \mu^{(1)}_1 & \mu^{(2)}_1 & \ldots\, \mu^{(2n)}_1 \\ U^1 & U^2 & \ldots\, U^4 & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & \ldots\, \mu^{(2n)} \\ V^1 & V^2 & \ldots\, V^{4n} & \lambda^{(1)} & \lambda^{(2)} & \ldots\, \lambda^{(2n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V^1_{2n-2} & V^2_{2n-1} & \ldots\, V^{4n}_{2n-1} & \lambda^{(1)}_{2n-1} & \lambda^{(2)}_{2n-1} & \ldots\, \lambda^{(2n)}_{2n} \end{vmatrix} = 0.$$