Estratto dal *Bollettino della Unione Matematica Italiana*
Dicembre 1951 - Serie III, Anno VI. Num. 4 (pagg. 277-280)

Sur la construction de surfaces irrégulières (*).

Nota di LUCIEN GODEAUX (a Liège).

Sunto. - *Costruzione di superficie irregolari come imagine di involuzioni cicliche appartenenti alla superficie delle coppie di punti di una curva algebrica.*

Considérons une courbe L, de genre π, non hyperelliptique, contenant une involution cyclique γ, d'ordre premier $p > 2$ et de genre $\pi' > 0$ engendrée par une transformation birationnelle τ de L en soi. Soit F la surface des couples de points non ordonnés de L. A un point P de cette surface, image du couple P_1P_2 de L, nous faisons correspondre le point P' image du couple $P'_1P'_2$ que τ fait correspondre au couple P_1P_2. Nous définissons ainsi sur F une transformation birationnelle T, de période p, engendrant une involution I possédant un nombre fini de points unis. Ceux-ci représentent les couples de points unis de γ, distincts ou non. Nous désignerons par Φ une surface image de l'involution I.

Prenons pour modéle projectif de L la courbe canonique d'ordre $2\pi - 2$ de $S_{\pi-1}$. La transformation τ est déterminée par une homographie presentant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, le premier, de dimension $\pi' - 1$, ne rencontrant pas L et les autres rencontrant éventuellement la courbe aux points unis de γ. Nous supposerons qu'en un de ces points, la courbe L n'est pas tangente à l'axe ponctuel qui le contient. En rapportant projectivement les complexes linéaires de droites de $S_{\pi-1}$ aux hyperplans d'un espace à $\frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - 1$ dimensions, on obtient pour modéle

(*) Conferenza tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Bologna il 5 Novembre 1951.

projectif de F une surface d'ordre $(\pi - 1)(4\pi - 9)$, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques (SEVERI).

Sur F, T est déterminée par une homographie présentant p axes ponctuels $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$ que l'on peut former de la manière suivante:

Si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, nous pouvons attacher à $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ respectivement les nombres ε^0, ε, ..., ε^{p-1}. Cela étant:

Σ_0 est déterminé par les images des droites de σ_0, des droites s'appuyant sur σ_1 et σ_{p-1}, sur σ_2 et $\sigma_{p-2}, \ldots$. A Σ_0 est donc attaché le nombre $\varepsilon^0 = 1$.

Σ_1 est déterminé par les images de droites des σ_1, des droites s'appuyant sur σ_0 et sur σ_2, sur σ_3 et sur $\sigma_{p-1}, \ldots$. A Σ_1 est donc attaché le nombre ε^2.

Et ainsi de suite.

Pour déterminer la structure des points unis de l'involution I, il suffit de connaître le nombre α déterminé de la manière suivante: Si U est un point uni de I, le plan tangent à F en U est uni pour l'homographie T. Rapportons ce plan à un triangle de référence $O_1O_2O_3$ tel que U coïncide avec le sommet O_3. L'homographie déterminée par T dans le plan peut s'écrire

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \eta x_2 : \eta^\alpha x_3 ,$$

η étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Désignons par $U'_1, U'_2, \ldots, U'_\delta$ les points unis de γ sur L et par U_{ik} le point de F qui représente le couple $U'_iU'_k$.

Premier cas. Les points unis U'_i, U'_k appartiennent à une même axe σ_h de τ. Soient t_i, t_k les tangentes à L en U'_i, U'_k.

Supposons en premier lieu que t_i, t_k s'appuyent en des points P_i, P_k sur un même axe σ_j et considérons l'espace $U'_iU'_kP_iP_k$. Prenons ces points comme sommets d'un tétraèdre de référence et soient x_i, x_h, y_i, y_k les cordonnées correspondantes. Dans cet espace τ détermine l'homographie

$$x'_i : x'_k : y'_i : y'_k = \varepsilon^h x_i : \varepsilon^h x_k : \varepsilon^j y_i : \varepsilon^j y_k .$$

Une quadrique passant par le droites $U'_iU'_k$, t_i, t_k a pour équation

$$ax_iy_k + bx_ky_i + cy_iy_k = 0. \tag{1}$$

L'homographie lui fait correspondre la quadrique

$$\varepsilon^h(ax_iy_k + bx_ky_i) + c\varepsilon^j y_iy_k = 0, \tag{2}$$

qui se raccorde à la première le long de la droite $U'_i U'_k$. On en conclut que U_{ik} est un point uni de première espèce.

Supposons maitenant que t_i s'appuie en P_i sur σ_j et t_k en P_k sur σ_l. L'homographie devient

$$x'_i : x'_k : y'_i : y'_k = \varepsilon^h x_i : \varepsilon^h x_k : \varepsilon^j y_i : \varepsilon^l y_k .$$

Cette fois, la quadrique transformée de la quadrique (1) ne se raccorde plus à celle-ci le long de $U'_i U'_k$ et U_{ik} est un point uni de seconde espèce.

Le plan tangent à F en U_{ik} est déterminé par le points U_{ik}, U_{ii}, U_{kk} et dans ce plan on a l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \varepsilon^{j+l} x_1 : \varepsilon^{h+l} x_2 : \varepsilon^{h+j} x_3 .$$

Le nombre α, compris entre l et p, est donné par la congruence

$$(p + h - j)\alpha \equiv p + h - l, \qquad (\text{mod } p).$$

Deuxième cas. U'_i et U'_k aqpartiennent le premier à σ_l, le second à σ_l, t_i s'appuie sur σ_j et t_k sur σ_m. Un raisonnement analogue au précédent montre que α est déterminé par la congruence

$$(p + h - m)\alpha \equiv p + l - j, \qquad (\text{mod } p)$$

Troisième cas. Il nous reste à considérer le points U_{ii}. Soient K les courbes de F qui représentent les couples de points de L dont un point est fixe. Les système $\{K\}$ admet pour enveloppe K_0 (représentant les couples de points de L formés de deux points confondus). Si K_i est la courbe K qui passe par U_{ii}, le point de F infiniment voisin de U_{ii} sur les courbes K_0 et K_i est uni de premiére espèce pour I.

Soit L' la oourbe image de l'involution γ et soit F' la surface des couples de points non ordonnés de L'. Entre F' et Φ, on a une correspondance $(1, p)$ et les courbes canoniques de F' ont pour homologues sur Φ des courbes qui appartiennent à des courbes canoniques de cette surface. Sur F, elles ont pour homologues des des courbes découpées par les hyperplans passant par Σ_1, $\Sigma_2, \ldots,$ Σ_{p-1}. On en conclut qu'aux courbes canoniques de Φ correspondent sur F les courbes découpées par les mêmes hyperplans. Par conséquent, si $s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}$ sont les dimensions des espaces σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, le genre géométrique de Φ est

$$p_g = \frac{1}{2}\pi'(\pi' - 1) + (s_1 + 1)(s_{p-1} + 1) + \ldots + (s_\gamma + 1)(s_{\gamma+1} + 1),$$

où l'on a posé $p = 2\gamma + 1$.

Les surfaces F et F' étant irréguliéres, il en est de même de Φ, mais le calcul du genre arithmétique de Φ exige la connaissance de la structure de points unis de I. Notons cependant que dans tous le exemples que nous avons étudiés, Φ a l'irrégularité π'.

BIBLIOGRAPHIE

Applications de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (Colloque de Géométrie algébrique de Liège, Paris, Masson, 1950, pp. 177-195); *Construction de surfaces algebrique irrégulierès* (Bull. Acad. roy. de Belgique, 1950, pp. 14-22); *Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Idem, pp. 102-112); *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Idem, pp. 383-387).

Bologna Cooperativa Tipografica Azzoguidi - 1951